ANALISIS *LAGRANGIAN NULL NONSTANDAR* DAN FUNGSI *GAUGE* UNTUK HUKUM *INERSIA* NEWTON : SEBUAH *REVIEW*

Amelia Ade Putri Ambot[1], Herry F. Lalus[1], Hartoyo Yudhawardana[1]
[1]*Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan,*
Universitas Nusa Cendana, Kupang, 85000, Indonesia
*email: aldaambot12@gmail.com

ABSTRAK

Paper ini menjelaskan review sebuah jurnal yang berjudul 'Nonstandard Null Lagrangians and Gauge Functions for Newtonian Law of Inertia' yang membahas tentang solusi Lagrangian Null Nonstandar untuk Hukum Inersia Newton. Tujuan dari penelitian ini adalah menyajikan secara terperinci metode Formalisme Lagrangian untuk menghasilkan Lagrangian Null Nonstandar dan fungsi Gaugenya untuk Hukum Inersia Newton, serta peran invarian aksi dalam membuat Lagrangian Null dan fungsi Gauge Eksak, dengan menurunkan persamaan gerak osilator satu dimensi menggunakan persamaan dasar Lagrangian. Lagrangian Null Nonstandar diturunkan dari Lagrangian Nonstandar, selanjutnya kedua Lagrangian Null tersebut dimasukan ke dalam invarian aksi untuk membuatnya Eksak, setelah Lagrangian Null Nonstandar dinyatakan Eksak, disubtitusikan kedalam $\widehat{D}_0 x(t) = 0$ *yang merepresentasikan Hukum Inersia Newton. Hasil penelitian menunjukan bahwa Lagrangian Null Nonstandar Eksak dapat dihasilkan dengan membuat Fungsi Gauge-nya Invarian, sehingga Lagrangian Null Nonstandar dan Fungsi Gauge-nya yang pertama untuk Hukum Inersia Newton diperoleh.*

Kata kunci: *Lagrangian Null Nonstandar; Lagrangian Null Standar; Fungsi Gauge Invarian Aksi; Hukum Inersia Newton; Formalisme Lagrangian*

ABSTRACT

[Title: Analysis of Nonstandard Null Lagrangians and Gauge Functions For Newton's Law Of Inertia: A Review] *This paper describes a review of a journal entitled 'Nonstandard Null Lagrangians and Gauge Functions for Newtonian Law of Inertia' which discusses Nonstandard Lagrangian Null solutions for Newton's Law of Inertia. The purpose of this study is to present in detail the Lagrangian Formalism method for generating Nonstandard Lagrangian Null and its Gauge function for Newton's Law of Inertia, as well as the role of action invariant in generating Lagrangian Null and Exact Gauge functions, by deriving a one-dimensional oscillator arm using the basic Lagrangian equations. The Nonstandard Null Lagrangian is derived from the Nonstandard Lagrangian, then the two Lagrangian Null are entered into the action invariant to make it Exact, after the Nonstandard Lagrangian Null is declared Exact, it is substituted into* $\widehat{D}_0\, x(t) = 0$ *which represents Newton's Law of Inertia. The results of this research show that an Exact Nonstandard Lagrangian Null can be generated by making the Gauge Function Invariant, so that the first Nonstandard Lagrangian Null and Gauge Function for Newton's Law of Inertia are obtained.*

Keywords: *Nonstandard Lagrangian Null; Standard Null Lagrangian; Action Invariant Gauge Function; Newton's Law of Inertia; Lagrangian Formalism*

PENDAHULUAN

Mekanika klasik merupakan pendekatan yang digunakan untuk memecahkan persoalan yang didasarkan pada mekanika gerak, yang menghubungkan konsep fisis besaran kinematika (perpidahan, kecepatan dan percepatan) berdasarkan konsep massa, gaya dan Hukum-Hukum Newton. Hukum Newton tentang gerak menggambarkan semua gejala mekanika klasik (Tipler, 1998). Lagrange dan Hamilton memperkenalkan suatu formulasi yang dapat memecahkan kasus pada mekanika klasik yakni dengan menggunakan konsep energi. Dalam beberapa kasus, penggunaan konsep energi jika dibandingkan dengan formulasi Newton lebih sederhana untuk mendapatkan persamaan gerak benda (Sudiarta, 2012). Gaya konstrain merupakan suatu gaya yang digunakan untuk menjaga kontak antara permukaan bidang dengan partikel dalam meninjau partikel yang dibatasi pada permukaan bidang tersebut. Pendekatan Newton memerlukan gaya total yang bereaksi pada partikel, termasuk gaya konstrain, pada kondisi ini pendekatan Newton tidak berlaku hal ini disebabkan oleh adanya gaya yang tidak diketahui, sehingga dibutuhkan pendekatan baru dengan meninjau energi totalnya yang merupakan kuantitas fisis lain dari karakterisktik partikel dengan menggunakan prinsip Hamilton, untuk menurunkan persamaan Lagrange. Mekanika Lagrange yaitu suatu metode yang diperlukan berbagai macam sistem dinamik untuk menentukan persamaan gerak dari sistem tersebut. Ide-ide dasar dan teorema Lagrangian adalah invarian di bawah kelompok ini dirumuskan dalam koordinat lokal. Sistem mekanik Lagrangian diberikan oleh ruang dan waktu serta fungsi pada berkas fungsi Lagrangian (Arnold, 1978). Hukum pertama Newton membahas tentang sifat benda yaitu inersia. Inersia adalah hambatan dalam perubahan gerak pada suatu benda. Hukum pertama Newton membahas kerangka acuan berlaku valid yang disebut kerangka acuan inersia. Hukum Inersia Newton mengesampingkan kerangka acuan dipercepat sebagai inersia, karena objek bergerak atau diam dengan kecapatan konstan, dapat dilihat dari kerangka acuan dipercepat juga diamati dari kerangka acuan inersia.

Pemecahan masalah Hukum Inersia Newton dalam penelitian ini yakni dengan menggunakan invers kalkulus variasi dan mengembangkan metode baru untuk menurunkan Lagrangian Standar dan Lagrangian Nonstandar. Lagrangian standar dan Nonstandar dijamin oleh kondisi *Helmholtz*, serta invarian aksi yang bertujuan untuk membuat fungsi *Gauge* yang tepat dan menghasilkan Lagrangian Null Nonstandar yang tepat. Lagrangian Null Nonstandar dibuat karena Lagrangian Standar dianggap tidak unik, karena adanya spektrum kontinu dari Lagrangian Standar ekuivalen yang semuanya mengarah kepada persamaan yang identik. Hal ini terjadi karena Lagrangian merupakan besaran skalar yang invarian terhadap transformasi koordinat (Musielak, Z. E., 2021). Oleh karena itu, penulis menyadari perlu adanya analisis untuk mengetahui bagaimana peran atau fungsi Lagrangian Null Nonstandar dan Fungsi *Gauge* untuk Hukum Inersia Newton. Berdasarkan uraian tersebut, maka penulis melakukan kajian pada jurnal Nonstandard Null Lagrangians and Gauge Functions for Newtonian Law of Inertia (Musielak, Z. E., 2021). Kajian ini dilakukan dikarenakan terdapat persamaan baru yang perlu dianalisis lebih dalam sehingga memudahkan pembaca memahami jurnal dengan baik, serta penelitian yang telah dilakukan pada jurnal ini adalah penelitian terbaru dengan penurunan persamaan yang sulit dipahami.

METODE PENELITIAN

Dalam penelitian ini formalisme Lagrangian ditetapkan untuk persamaan diferensial dengan fungsi khusus fisika matematika sebagai solusi. Formalisme didasarkan pada *Lagrangian Standar* atau Nonstandar. Penelitian ini menunjukkan bahwa prosedur untuk menurunkan Lagrangian Standar mengarah ke Lagrangian di mana persamaan *Euler–Lagrange* menghilang secara identik dan hanya beberapa dari Lagrangian ini yang menjadi *Lagrangian Null* dengan fungsi *Gauge* yang terdefinisi dengan baik. *Lagrangians Nonstandar* mensyaratkan persamaan *Euler–Lagrange* diubah oleh kondisi tambahan, yang merupakan fenomena baru dalam kalkulus variasi. Keberadaan kondisi tambahan memiliki implikasi mendalam pada validitas kondisi *Helmholtz* (Musielak , Davachi , & Maria, 2020). Adapun Langka-langkah dalam penelitian ini yakni dengan menentukan Lagrangian Standar, setelah Lagrangian Standarnya diperoleh lalu diturunkan untuk mendapatkan Lagrangian *Null* dan fungsi *Gauge*-nya. Selanjutnya menurunkan Lagrangian Nonstandar dan fungsi *Gauge*-nya untuk memperoleh Lagrangian *Null* Nonstandar dan fungsi *Gauge*-nya. Fungsi yang ada pada Lagrangian *Null* baik standar dan Nonstandar adalah fungsi arbitrer, maka perlu melakukan invarian aksi untuk menghasilkan Fungsi *Gauge* dan Lagrangian *Null* Nonstadar yang Eksak. Langkah terakhir adalah menerapkan hasil yang telah diperoleh pada Hukum Inersia Newton yang direpresentasikan oleh $\widehat{D}_0 x(t) = 0$, di mana Lagrangian *Null* Nonstandar Eksak dan Fungsi *Gauge* Eksak yang sesuai diturunkan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Analisis Lagrangian *Null* Standar

Lagrangian Standar diperoleh dengan menurunkan persamaan gerak dengan menggunakan fungsi dasar Lagrangian

$$L = T - V \tag{1}$$

dengan menggunakan prinsip variasi aksi. Persamaan (1) digunakan untuk menurunkan persamaan *Euler-Lagrange,* baik untuk sistem konservatif maupun sistem nonkonservatif. Persamaan umum *Euler-Lagrange* yaitu:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}k}\right) - \frac{\partial L}{\partial qk} = 0. \tag{2}$$

Persamaan gerak pada pada osilator teredam satu dimensi $(q = x)$, diberikan oleh

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) \equiv \ddot{x} + b\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3}$$

yang dipertimbangkan dalam bentuk $\widehat{D}x(t) = 0$, diperoleh Lagrangian Standarnya

$$L_S(\dot{x}, x, t) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - cx^2)e^{bt}. \tag{4}$$

Lagrangian ini diturunkan oleh Cardirola-Kanai (Caldirola, 1941) dan jika $b = 0$, persamaan (4) tereduksi menjadi $L_S(\dot{x}, x, t) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - cx^2)$, yang merupakan Lagrangian murni atau Lagrangian osilator harmonik satu dimensi. Selanjutnya menentukan Lagrangian *Null,* yang dapat diperoleh jika dan hanya jika turunan waktu total dari fungsi skalar atau fungsi *Gauge*nya dapat dinyatakan sebagai

$$L_{null}(\dot{x},x,t)=\frac{d\phi(x,t)}{dt}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\phi}{\partial t}\qquad(5)$$

untuk membuat Lagrangian *Null* Standar secara alami dengan mengikuti bentuk pada persamaan (5), maka untuk

$$\phi_{sn1}(x,t)=\frac{1}{2}c_1x^2$$

$$L_{sn1}(\dot{x},x)=\frac{d\phi_{sn1}(x,t)}{dt}$$

$$L_{sn1}(\dot{x},x)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}c_1x^2\right]\dot{x}=c_1x\dot{x}$$

$$L_{sn1}(\dot{x},x)=c_1\dot{x}x\qquad(6)$$

di mana c_1 adalah konstanta sembarang. Dalam Lagrangian ini besarnya variabel dependen sama dengan Lagrangian Standar yang diberikan oleh persamaan (4), namun variabel dependen dan turunannya dicampur. Lagrangian *Null* pada persamaan (5) dapat digeneralisasikan secara identik menjadi nol oleh operator *Euler-Lagrange*

$$\widehat{EL}\left[L_{null}\frac{d\phi(x,t)}{dt}\right]=0.$$

Menggunakan $\widehat{EL}(L_m+L_f)=0$, di mana:

L_m : Lagrangian campuran variabel bebas dan terikat,

L_f : Lagrangian dari variabel terikat tunggal.

Variabel bebas dan terikat merupakan variabel yang bergantung pada waktu dan turunannya, sedangkan variabel terikat tunggal merupakan variabel yang hanya bergantung pada turunan terhadap posisi.

$$L_m[\dot{x},x,t)]=C_1\dot{x}x+C_2[\dot{x}t+x]$$

$$L_f[\dot{x},x]=C_3\dot{x}+C_4$$

untuk menghasilkan Lagrangian L_{sn2}, $\widehat{EL}(L_m+L_f)=0$

$$L_{sn2}(\dot{x},x,t)=c_1\dot{x}x+c_2(\dot{x}t+x)+c_3\dot{x}+c_4\qquad(7)$$

di mana c_1,c_2,c_3 dan c_3 adalah konstanta arbitrer dan L_{sn2} menjadi L_{sn1} jika $c_2=c_3=c_4=0$. Lagrangian ini dibuat dengan prinsip bahwa besarnya variabel dependen atau independen atau kombinasinya, tidak lebih dari yang diberikan oleh Lagrangian Standar asli pada persamaan (4), karena

$$L_{sn2}(\dot{x},x,t)=\frac{d\phi_{sn2}(x,t)}{dt},\qquad(8)$$

maka fungsi *Gauge* $\phi_{sn2}(x,t)$ diberikan oleh:

$$\phi_{sn2}(x,t)=\frac{1}{2}c_1x^2+c_2xt+c_3+c_4t\qquad(9)$$

turunan $\phi_{sn2}(x,t)$, digeneralisasi dengan mengganti koefisien konstantanya dengan fungsi arbitrer yang hanya bergantung pada variabel independen, kemudian fungsi *Gauge* standar $\phi_{sn3}(x,t)$. Fungsi *Gauge* parsial $\phi_{sn2}(x,t)$ diperoleh dari variabel dinamis. Oleh karena itu, salah satu cara untuk menggeneralisasikan fungsi *Gauge* dengan cara mengganti konstanta c pada persamaan (9) dengan fungsi f yang sesuai yang bergantung pada variabel bebas (t) tanpa perlu mengubah variabel dinamis

$$\phi_{sn3}(x,t)=\frac{1}{2}f_1(t)x^2+f_2(t)xt+f_3(t)+f_4(t)t,\qquad(10)$$

$\phi_{sn3}(x,t)$ merupakan fungsi dari variabel, yang turunan totalnya menghasilkan Lagrangian *Null* Standar umum berikut:

$$L_{sn3}(\dot{x},x,t)=\left[f_1(t)\dot{x}x+\frac{1}{2}\dot{f}_1(t)x^2\right]+\left[f_2(t)\dot{x}t+\dot{f}_2(t)xt+f_2(t)x\right]+\left[f_3(t)\dot{x}+\dot{f}_3(t)x\right]+[f_4(t)+\dot{f}_4\,(t)(t)],\qquad(11)$$

di mana semua fungsi di atas merupakan fungsi arbitrer yang diturunkan dua kali dari fungsi variabel independen. Generalisasi fungsi *Gauge* pada persamaan (10), merupakan salah satu cara untuk mendapatkan Lagrangian *Null* baru, terdapat cara lain yang dapat dilakukan yakni dengan mengganti koefisien konstanta dalam $L_{sn2}(\dot{x},x,t)$ dengan fungsi $f(t)$, sehingga diperoleh

$$L_{sn4}(\dot{x},x,t)=f_1(t)\dot{x}x+f_2(t)\dot{x}t+f_2(t)x+f_3(t)\dot{x}+f_4(t),\qquad(12)$$

selanjutnya, menerapkan $\widehat{EL}\{L_s,test(\dot{x},x,t)\}=0$, ditemukan $L_{sn4}(\dot{x},x,t)$ Lagrangian *Null* jika dan hanya jika $f_1(t),f_2(t),f_3(t)$ diberlakukan kondisi berikut

$$\dot{f}_1(t)x+\dot{f}_2(t)t+\dot{f}_3(t)=0.\qquad(13)$$

Solusi untuk persamaan (13), dengan mengganti konstanta c dengan fungsi $f(t)$, yang mereduksi $L_{sn4}(\dot{x},x,t)$ menjadi $L_{sn2}(\dot{x},x,t)$ tanpa generalisasi apapun, dengan kondisi tambahan bahwa $f_4(t)=c_4$. Fungsi pada persamaan (12) dibatasi oleh kondisi tambahan yang diberikan oleh persamaan (16) dan $L_{sn3}(\dot{x},x,t)$ tidak membutuhkan batasan terhadap fungsi-fungsi tersebut, maka persamaan (12) lebih umum dari $L_{sn4}(\dot{x},x,t)$, sehingga Lagrangian *Null* Standar umum $L_{sgn}(\dot{x},x,t)=L_{sn3}(\dot{x},x,t)$.

Analisis Lagrangian *Null* Nonstandar

Lagrangian yang memiliki bentuk yang berbeda dari $L_s(\dot{x},x,t)=\frac{1}{2}[\dot{x}^2(t)-{\omega_0}^2x^2(t)]e^{bt}$

disebut sebagai Lagrangian Nonstandar. Lagrangian Nonstandar bergantung pada fungsi selain waktu variabel dinamis biasa seperti x dan $\dot{x}$ untuk satu sistem dengan satu derajat kebebasan.
Lagrangian Nonstandar untuk persamaan gerak berikut

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}^2(t) + \dot{x}(t) + x(t) = \mathcal{F}(t) \qquad (14)$$

adalah

$$L(\dot{x}, x, t) = \frac{1}{\dot{x}(t) + x(t) + (t)} \qquad (15)$$

di mana:
$x(t) =$ perpindahan
$\dot{x}(t) =$ turunan pertama terhadap waktu
$\ddot{x}(t) =$ turunan kedua terhadap waktu
$\mathcal{F}(t) =$ gaya aksi merupakan fungsi arbitrer tetapi kontinu (Musielak Z. , 2009).
Bentuk umum dari Lagrangian Nonstandar

$$L_{ns}(\dot{x}, x, t) = \frac{1}{a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x + a_3(t)} \qquad (16)$$

di mana $a_1(t)$, $a_2(t)$, dan $a_3(t)$ merupakan fungsi yang dapat diturunkan untuk ditentukan. Lagrangian *Null* Nonstandar memiliki bentuk yang berbeda dengan Lagrangian *Null* pada persamaan (7) dan persamaan (11), bentuknya serupa dengan persamaan (14) dan harus mengandung $(\dot{x}, x, t)$, mirip dengan yang digunakan untuk membangun $L_{sn2}(\dot{x}, x, t)$, $L_{sn3}(\dot{x}, x, t)$ dan $L_{sn4}(\dot{x}, x, t)$ di mana besarnya variabel dependen dan turunannya tidak melebihi Lagrangian Nonstandar pada persamaan (16).

Suatu Lagrangian *Null* Nonstandar dapat diperoleh dengan cara memisalkan b_1, b_2, b_3 dan b_4 sebagai konstanta dalam test Lagrangian Nonstandar, yang menggambarkan suatu sistem yang mengalami percepatan konstan.

$$L_{ns,test\,1}(\dot{x}, x, t) = \frac{b_1\dot{x}}{b_2\,x + b_3\,t + b_4} \qquad (17)$$

$L_{ns,test\,1}(\dot{x}, x, t)$ adalah Lagrangian *Null* jika dan hanya jika, $b_3 = 0$. Lagrangian ini harus memenuhi persamaan *Euler-Lagrange,* $\widehat{EL}\{L_{ns}(\dot{x}, x, t)\} = 0$, kondisi yang dibutuhkan adalah $b_1 b_3 = 0$, dengan $b_1 \neq 0$, $b_3 = 0$, dan $L_{ns,test\,1}(\dot{x}, x, t) = L_{nsn1}(\dot{x}, x, t)$, di mana yang terakhir adalah Lagrangian *Null* Nonstandar diberikan oleh:

$$L_{nsn1}(\dot{x}, x, t) = \frac{b_1\dot{x}}{b_2 x + b_4}, \qquad (18)$$

fungsi *Gauge*nya $\phi_{nsn1}(x)$ adalah

$$\phi_{nsn1}(x) = \frac{b_1}{b_2} \ln |b_2 x + b_4|. \qquad (19)$$

Selanjutnya mengeneralisasi $L_{nsn1}(\dot{x}, x)$ pada persamaan (18) dengan memisalkan $h_1(t), h_2(t)$ dan $h_4(t)$ menjadi setidaknya dua kali fungsi yang dapat diturunkan dan $L_{nsn1}(\dot{x}, x)$ menjadi Lagrangian *Null* Nonstandar yang diberikan oleh persamaan (18), dengan fungsi *Gauge* yang sesuai diberikan oleh persamaan (19). Lagrangian *Null* Nonstandar lebih umum, jika dan hanya jika, konstanta $\phi_{nsn1}(x)$ digantikan oleh fungsi $h_1(t), h_2(t)$ dan $h_4(t)$. Mengganti koefisien konstanta b_1, b_2 dan b_4 dalam $L_{nsn1}(\dot{x}, x)$ dengan fungsi $h_1(t), h_2(t)$ dan $h_4(t)$, masing-masing, Lagrangian yang dihasilkan adalah:

$$L_{ns}(\dot{x}, x, t) = \frac{h_1(t)\dot{x}}{h_2(t)x + h_4(t)} \qquad (20)$$

menggunakan persamaan *Euler-Lagrange* $\widehat{EL}\{L_{ns,test2}(\dot{x}, x, t)\} = 0$, ditemukan bahwa $L_{ns,test2}(\dot{x}, x, t)$ adalah Lagrangian *Null* Nonstandar jika $h_1(t) = b_1, h_2(t) = b_2$ dan $h_4(t) = b_4$, yang mereduksi $L_{ns,test2}(\dot{x}, x, t)$ menjadi $L_{nsn1}(\dot{x}, x, t)$ dan menunjukan tidak ada generalisasi pada $L_{nsn1}(\dot{x}, x, t)$ dapat dilakukan dengan cara lain. Selanjutnya, mengganti koefisien kontanta pada $\phi_{nsn1}(x)$ dengan fungsi $h_1(t), h_2(t)$ dan $h_4(t)$ mengeneralisasi fungsi *Gauge* ke

$$\phi_{nsgn}(x, t) = \frac{h_1(t)}{h_2(t)} \ln |h_2(t)x + h_4(t)| \qquad (21)$$

karena, turunan total dari fungsi skalar bergantung pada *x* dan waktu *t* adalah Lagrangian *Null,* Lagrangian *Null* Nonstandar diperoleh:

$$L_{nsgn}(\dot{x}, x, t) = \frac{h_1(t)\left[h_2(t)\dot{x} + \dot{h}_2(t)x\right] + h_4(t)}{h_2(t)[h_2(t)x + h_4(t)]} + \left[\frac{\dot{h}_1(t)h_2(t) - h_1(t)\dot{h}_2(t)}{h_2^2(t)}\right] ln|h_2(t)x + h_4(t)| \qquad (22)$$

$\widehat{EL}\{L_{nsgn}(\dot{x}, x, t)\} = 0$ dengan demikian $L_{nsgn}(\dot{x}, x, t)$ adalah Lagrangian *Null* umum jika dibandingkan dengan persamaan (18). Lagrangian *Null* Nonstandar $L_{nsgn}(x, x, t)$ dan fungsi *Gauge* $\phi_{nsgn}(\dot{x}, x, t)$ mewakili Lagrangian *Null* umum baru yang Nonstandar dan fungsi *Gauge* ini diturunkan berdasarkan kondisi bahwa besarnya variabel dependen dalam Lagrangian *Null* umum yang Nonstandar sama dengan atau lebih rendah dari yang ada dalam Lagrangian Nonstandar murni yang (16).

Analisis Peran Invarian Aksi dalam Membuat Lagrangian *Null* Eksak dan Fungsi *Gauge* Eksak

Fungsi dalam Lagrangian Standar dan Lagrangian Nonstandar adalah fungsi arbitrer, sehingga diperlukan kendala matematika yakni invarian aksi untuk memperkenalkan fungsi *Gauge* eksak dan persamaan dinamis yang dihasilkan. Invarian aksi yang diterapkan pada Lagrangian *Null* Standar dan Lagrangian *Null* Nonstandar dan fungsi *Gauge*nya diperoleh. Dalam kalkulus variasi, aksi didefenisikan sebagai

$$A[x;t_e,t_o]=\int_{t_o}^{t_e}(L+L_{null})dt$$

$$A[x;t_e,t_o]=\int_{t_o}^{t_e}L\,dt+\int_{t_o}^{t_e}\left[\frac{d\phi_{null}(t)}{dt}\right]dt$$

$$A[x;t_e,t_o]=\int_{t_o}^{t_e}L\,dt+[\phi_{null}(t_e)-\phi_{null}(t_o)],\quad(23)$$

di mana:

t_o dan t_e : waktu awal dan akhir,

L : Lagrangian dapat berupa Lagrangian Standar dan Lagrangian Nonstandar,

L_{null} : Lagrangian *Null* dan ϕ_{null} fungsi *Gauge.*

$\phi_{null}(t_e)$ dan $\phi_{null}(t_o)$ merupakan konstanta yang tidak mempengaruhi prinsip Hamilton yang membutuhkan $\delta A[x]=0,$ dengan syarat bahwa $\Delta\phi_{null}=\phi_{null}(t_e)-\phi_{null}(t_o)=$ konstan, menambahkan konstanta ini ke nilai aksi, yang berarti bahwa fungsi *Gauge* mempengaruhi aksi. Invarian aksi memperkenalkan defenisi Lagrangian *Null* dan Fungsi *Gauge*nya. Suatu Lagrangian *Null* disebut Lagrangian *Null* Eksak (ENL), jika memiliki $\Delta\phi_{null}=0$. Fungsi *Gauge* dengan $\Delta\phi_{null}=0$ disebut fungsi *Gauge* Eksak (EGF). Kondisi $\Delta\phi_{null}=0$ terpenuhi ketika $\phi_{null}(t_e)-\phi_{null}(t_o)=0,$ atau $\phi_{null}(t_e)=0$ dan $\phi_{null}(t_o)=0,$ diberlakukan dan Lagrangian *Null* Eksak adalah Lagrangian *Null* yang fungsi *Gauge*nya membuat invarian aksi. Invarian aksi digunakan untuk menetapkan batasan dari fungsi arbitrer dalam Lagrangian *Null,* $L_{sgn}(\dot{x},x,t)$ pada persamaan (11) dan fungsi *Gauge* $\phi_{sgn1}(x,t)$ pada persamaan (10) dan membuat kedua persamaan ini Eksak, dengan mengambil $\phi_{sgn}(t_e)=0$ dan $\phi_{sgn}(t_o)=0,$ kondisi berikut diperoleh:

$$\frac{1}{2}f_1(t_e)x_e^2+f_2(t_e)x_et_e+f_3(t_e)x_e+f_4(t_e)t_e=0\quad(24)$$

dan

$$\frac{1}{2}f_1(t_o)x_o^2+f_2(t_o)x_ot_o+f_3(t_o)x_o+f_4(t_o)t_o=0\quad(25)$$

dengan $x_e=x(t_e)$ dan $x_o=x(t_0)$ menunjukan titik akhir. $L_{sgn}(\dot{x},x,t)$ dan $\phi_{sgn}(x,t)$ adalah eksak, jika fungsi arbitrer terpenuhi pada kondisi berikut ini. Kondisi pertama dapat diselesaikan dengan mengambil $f_3(t_e)=-\frac{f_1(t_e)x_e}{2}$ dan $f_4(t_e)=-f_2(t_e)x_e$. Maka diperoleh untuk persamaan (76)

$$\frac{1}{2}f_1(t_e)x_e^2+f_2(t_e)x_et_e+f_3(t_e)x_e+f_4(t_e)t_e=0$$

$$\frac{1}{2}f_1(t_e)x_e^2-\frac{f_1(t_e)x_e^2}{2}+f_2(t_e)x_et_e-f_2(t_e)x_et_e=0\quad(27)$$

solusi serupa berlaku untuk t_o menunjukan bahwa nilai akhir untuk fungsi dapat berhubungan satu sama lain.

$$\frac{1}{2}f_1(t_o)x_o^2+f_2(t_o)x_ot_o+f_3(t_o)x_o+f_4(t_o)t_o=0$$

$$\frac{1}{2}f_1(t_o)x_o^2-\frac{f_1(t_o)x_o^2}{2}+f_2(t_o)x_ot_o-f_2(t_o)x_ot_o=0.\quad(28)$$

selanjutnya, diperoleh Lagrangian *Null* Eksak (ENL)

$$L_{ENL}(\dot{x},x,t)=\frac{d(\phi_{sgn}(x_e,t_e))}{dt}$$

$$L_{ENL}(\dot{x},x,t)=\left[\frac{1}{2}\ \dot{f}_1(t_e)x_e^2+\frac{1}{2}f_1(t_e)\ \dot{x_e}^2\right]-\left[\frac{1}{2}\ \dot{f}_1(t_e)x_e^2+\frac{1}{2}f_1(t_e)\ \dot{x_e}^2\right]+\left[\frac{1}{2}\ \dot{f}_2(t_e)x_e^2+\frac{1}{2}f_2(t_e)\ \dot{x_e}^2\right]-\left[\frac{1}{2}\ \dot{f}_2(t_e)x_e^2+\frac{1}{2}f_2(t_e)\ \dot{x_e}^2\right]\quad(29)$$

$$L_{ENL}(\dot{x},x,t)=\frac{d(\phi_{sgn}(x_0,t_0))}{dt}$$

$$L_{ENL}(\dot{x},x,t)=\left[\frac{1}{2}\ \dot{f}_1(t_0)x_0^2+\frac{1}{2}f_1(t_0)\ \dot{x_0}^2\right]-\left[\frac{1}{2}\ \dot{f}_1(t_0)x_0^2+\frac{1}{2}f_1(t_0)\ \dot{x_0}^2\right]+\left[\frac{1}{2}\ \dot{f}_2(t_0)x_0^2+\frac{1}{2}f_2(t_0)\ \dot{x_0}^2\right]-\left[\frac{1}{2}\ \dot{f}_2(t_0)x_0^2+\frac{1}{2}f_2(t_0)\ \dot{x_0}^2\right]\quad(30)$$

Menerapkan prosedur yang sama pada $L_{nsgn}(\dot{x},x,t)$ pada persamaan (22) dan ke fungsi

Gauge umum yang dihasilkan $\phi_{null}(\dot{x},x,t)$ persamaan (21), kondisi pada fungsi arbitrer adalah:

$$\phi_{nsgn(x)} = \frac{h_1(t)}{h_2(t)}\ln|h_2(t)x + h_{4(t)}|$$

$$\left[\frac{h_1(t_e)}{h_2(t_e)}\right]\ln|h_2(t_e)x_e + h_4(t_e)| = 0, \qquad (31)$$

dan

$$\phi_{nsgn(x)} = \frac{h_1(t)}{h_2(t)}\ln|h_2(t)x + h_{4(t)}|$$

$$\left[\frac{h_1(t_o)}{h_2(t_o)}\right]\ln|h_2(t_o)x_o + h_4(t_o)| = 0 \qquad (32)$$

karena $\ln[h_2(t_e)x + h_4(t_e)] \neq 0$ dan $\ln[h_2(t_e)x + h_4(t_e)] \neq 0,$ kedua kondisi menetapkan batas ketat pada fungsi $h_1(t)$, yang nilai akhirnya harus menjadi $h_1(t_e) = 0\ dan\ h_1(t_o) = 0$, namun prosedur tersebut tidak memaksakan batasan apapun pada baik pada $h_2(t)$ atau $h_4(t)$,

$$\phi_{nsgn}(x_e,t_e) = \left[\frac{h_1(t_e)}{h_2(t_e)}\right]\ln|h_2(t_e)x_e + h_4(t_e)| = 0,$$

$$\phi_{nsgn}(x_e,t_e) = \left[\frac{0}{h_2(t_e)}\right]\ln|h_2(t_e)x_e + h_4(t_e)| = 0, \qquad (33)$$

$$L_{NENL}(\dot{x},x,t) = \frac{d(\phi_{nsgn}(x_e,t_e))}{dt}$$

$$L_{NENL}(\dot{x},x,t) = \frac{0[h_2(t_e)\dot{x_e} + \dot{h}_2(t_e)x_e] + h\,_4(t_e)}{(h_2\,(t_e)[h_2\,(t_e)x_e + h_4\,(t_e)]\,)} + \left[\frac{0}{h_2(t_e)} - \frac{0[\dot{h}_2(t_e)]}{h_2^2(t_e)}\right]\ln|h_2(t_e)x_e + h_4(t_e)| = 0 \qquad (34)$$

$$\phi_{nsgn}(x_0,t_0) = \left[\frac{h_1(t_o)}{h_2(t_o)}\right]\ln|h_2(t_o)x_o + h_4(t_o)| = 0$$

$$\phi_{nsgn}(x_0,t_0) = \left[\frac{0}{h_2(t_o)}\right]\ln|h_2(t_o)x_o + h_4(t_o)| = 0 \qquad (35)$$

$$L_{NENL}(\dot{x},x,t) = \frac{d(\phi_{nsgn}(x_0,t_0))}{dt}$$

$$L_{NENL}(\dot{x},x,t) = \frac{0[h_2(t_0)\dot{x_0} + \dot{h}_2(t_0)x_0] + h\,_4(t_0)}{(h_2\,(t_0)[h_2\,(t_0)x_0 + h_4\,(t_0)])} + \left[\frac{0}{h_2(t_0)} - \frac{0[\dot{h}_2(t_0)]}{h_2^2(t_0)}\right]\ln|h_2(t_0)x_0 + h_4(t_0)| = 0. \qquad (36)$$

Analisis Aplikasi Lagrangian *Null* Nonstandar untuk Hukum *Inersia* Newton

Misalkan (x,t) adalah kerangka inersia dan (x',t') adalah kerangka inersia lain yang bergerak relatif antara satu dengan yang lain dengan $v_0 =$ konstan dan misalkan asal-usul sistem berhimpit pada $t = t' = t_0 = 0$. Kemudian transformasi Galileo menghubungkan kedua sistem yakni $x' = x - v_0t$ dan $t' = t$, dengan kata lain, partikel klasik yang bergerak dengan kecepatan $u = \dot{x}$ dalam sistem (x,t) memiliki kecepatan $u' = \dot{x}'$ dalam (x',t'). Kedua kecepatan dihubungkan oleh transformasi Galileo, sehingga $u' = u - v_0$. Misalkan (x,y,z) menjadi sistem koordinat kartesian dan biarkan t menjadi waktu di semua bingkai inersia, maka gerakan satu dimensi benda dalam bingkai inersia diberikan oleh $\widehat{D}_o x(t) = 0$, yang mewakili Hukum Inersia. Solusi dari $\widehat{D}x(t) = 0$ dapat ditulis sebagai $x(t) = at + b$, di mana a dan b adalah konstanta integrasi, dengan mengatur kondisi $t_o = 0$ dan $t_e = 1$ menjadi kondisi akhir dan $x(0) = x_o = 1, x(1) = x_e = 2$, dan $\dot{x}(0) = \mu_o$ menjadi kondisi awal, kemudian $a = u_0$ dan $b = x_0$ dan $x(t) = u_0t + x_0$ solusi menjadi $x(t) = \mu_o t + 1$. Lagrangian standar untuk persamaan gerak ini diberikan oleh persamaan (4), dengan koefisien $b = c = 0$, dan tidak ada fungsi arbitrer yang akan ditentukan, untuk memperoleh Lagrangian *Null* Standar umum dan fungsi *Gauge* tepat, kondisi pada persamaan (24) dan (25) harus diterapkan pada fungsi arbitrer. Agar Lagrangian *Null* Eksak, aksi harus invarian yang mengharuskan persamaan (24),

$$\frac{1}{2}f_1(t_e)x_e^2 + f_2(t_e)x_et_e + f_3(t_e)x_e + f_4(t_e)t_e = 0$$

dengan cara mengsubtitusikan nilai $x(1) = x_e = 2$ dan $t_e = 1$, maka diperoleh:

$$\frac{1}{2}f_1(1) + f_2(1) + f_3(1) + f_4(1) = 0 \qquad (37)$$

dan persamaan (25)

$$\frac{1}{2}f_1(t_o)x_o^2 + f_2(t_o)x_ot_o + f_3(t_o)x_o + f_4(t_o)t_o = 0$$

mengsubtitusikan nilai $x(0) = x_o = 1$ dan c, maka diperoleh:

$$f_3(0) = -\frac{1}{2}f_1(0) \qquad (38)$$

kondisi ini menjamin bahwa $L_{sgn}(\dot{x},x,t)$ dan $\phi_{sgn}(x,t)$ masing-masing adalah Lagrangian Standar Umum Eksak dan Fungsi *Gauge* Umum Eksak.

Menentukan Lagrangian Nonstandar untuk Hukum Inersia

Sistem koordinat kartesian (x,y,z) dengan t waktu untuk pada semua kerangka inersia, maka gerakan

satu dimensi pada kerangka acuan inersia diberikan oleh $\widehat{D}_0 x(t) = 0$
di mana:

$$\widehat{D}_0 x(t) = \frac{d^2(x(t))}{dt^2} + b(t)\frac{d(x(t))}{dt} + c(t)$$

dengan $b = 0$ dan $c = 0$ menjadi persamaan gerak untuk Hukum Inersia dengan mengikuti bentuk umum dari persaman Lagrangian Nonstandar

$$L_{ns}(\dot{x}, x, t) = \frac{1}{a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x + a_3(t)}$$

Kondisi pertama untuk $a_3(t) = 0$, maka $L_{ns}(\dot{x}, x, t) = \frac{1}{a_1(t)\dot{x}+a_2(t)x+a_3(t)}$ menjadi $L_{ns}(\dot{x}, x, t) = \frac{1}{a_1(t)\dot{x}+a_2(t)x}$, selanjutnya mensubtitusikan persamaan Lagrangian Nonstandar tersebut ke dalam persamaan *Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{ns}}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L_{ns}}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(-a_1(t)[(a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x)]^{-2}\right) - \frac{a_2(t)}{(a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x)^2} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}_1(t)}{a_1(t)} + \frac{3a_2(t)}{a_1(t)}\right)\dot{x} + \left(\frac{\dot{a}_2(t)}{a_1(t)} - \frac{\dot{a}_1(t)a_2(t)}{2a_1^2(t)} + \frac{a_2^2(t)}{2a_1^2(t)}\right)x = 0$$

dengan membandingkan persamaan ini dengan persamaan $\widehat{D}x(t) = 0$, diperoleh dua kondisi berikut

$$\frac{1}{2}\frac{\dot{a}_1(t)}{a_1(t)} + \frac{3}{2}\frac{a_2(t)}{a_1(t)} = b(t) \tag{39}$$

$$\frac{\dot{a}_2(t)}{a_1(t)} - \frac{1}{2}\frac{\dot{a}_1(t)}{a_1(t)}\frac{a_2(t)}{a_1(t)} + \frac{a_2^2(t)}{2a_1^2(t)} = c(t) \tag{40}$$

dengan nilai dari $b(t)$ dan $c(t)$ sama dengan nol, selanjutnya untuk kondisi kedua dengan $a_3(t) \neq 0$, dengan menggunakan cara yang sama, sehingga persamaan $L_{ns}(\dot{x}, x, t) = \frac{1}{a_1(t)\dot{x}+a_2(t)x+a_3(t)}$ disubtitusikan ke dalam persamaan *Euler-Lagrange*,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{ns}}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L_{ns}}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{a_2(t)}{\left(a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x + a_3(t)\right)^2}\right) - \left(-\frac{a_2(t)}{\left(a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x + a_3(t)\right)^2}\right) = 0$$

$$\frac{\begin{array}{c}[-\dot{a}_1(t) + a_2(t)] \\ [a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x + a_3(t)] + \\ 2\begin{pmatrix}\dot{a}_1(t)\dot{x} + a_1(t)\ddot{x} + \dot{a}_2(t)x \\ +a_2(t)\dot{x} + \dot{a}_3(t)\end{pmatrix} a_1(t)\end{array}}{\left(a(t)\dot{x} + a_2(t)x + a_3(t)\right)^3} = 0$$

sehingga diperoleh:

$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}_1(t)}{a_1(t)} + \frac{3a_2(t)}{a_1(t)}\right)\dot{x} + \left(\frac{\dot{a}_2(t)}{a_1(t)} - \frac{\dot{a}_1(t)a_2(t)}{2a_1^2(t)} + \frac{a_2^2(t)}{2a_1^2(t)}\right)x + \left(\frac{a_3(t)}{a_1(t)} - \frac{\dot{a}_1(t)a_3(t)}{2a_1^2(t)} + \frac{a_3(t)}{a_1(t)}\frac{a_2(t)}{2a_1(t)}\right) = 0$$

$$\frac{a_3(t)}{a_1(t)} - \frac{1}{2}\frac{\dot{a}_1(t)}{a_1(t)}\frac{a_3(t)}{a_1(t)} + \frac{a_3(t)}{a_1(t)}\frac{a_2(t)}{2a_1(t)} = 0 \tag{41}$$

di mana $a_1(t), a_2(t)$ dan $a_3(t)$ adalah fungsi arbitrer yang dapat terdiferensiasi, hal ini berarti bahwa suatu fungsi dapat diturunkan pada suatu titik ketika ada turunan yang ditentukan pada titik tersebut, dan integral, jika dan hanya jika:

$$a_1(t) = e^{I_u(t)} \tag{42}$$

$$a_2(t) = \frac{2}{3}\left[b(t) - \frac{1}{2}u(t)\right]e^{I_u(t)} \tag{43}$$

$$a_3(t) = e^{\frac{2I_u(t)}{3}}e^{-\frac{I_b(t)}{3}} \tag{44}$$

$I_u(t) = \int u(t)dt$, yang merupakan solusi dari persamaan Riccati

$$I_b(t) = \int b(t)dt$$

mengeliminasi $a_2(t)$ dari persamaan (39) dan (40) dan mendefenisikan $u(t) = \frac{\dot{a}_1(t)}{a_1(t)}$, sehingga diperoleh:

$$\dot{u}(t) + \frac{1}{3}u^2(t) = 0 \tag{45}$$

yang merupakan bentuk khusus dari persamaan Riccati, dengan solusi untuk persamaan (45) dengan menggunakan transformasi

$$u(t) = 3\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} \tag{46}$$

dengan $v(t)$ mewakili solusi untuk $\ddot{v}(t = 0)$ yang merupakan kondisi tambahan. Kondisi awal $v(t = 0) = v_0$ dan $\dot{v}(t = 0) = a_0$ berbeda dari yang digunakan untuk $\widehat{D}_0 x(t) = 0$, kemudian solusinya menjadi $v(t) = a_0 + v_0$ dan fungsi $a_1(t), a_2(t)$ dan $a_3(t)$, setelah diperoleh hasil

$$a_1(t) = C_1(a_0 t + v_0)^3 \tag{47}$$

di mana C_1 adalah konstanta integrasi.

$$a_2(t) = -C_1 a_0(a_0 t + v_0)^2 \tag{48}$$

$a_3(t)$ diperoleh dengan mengeliminasi $a_1(t)$ dan $a_2(t)$ pada persamaan (41)

$$a_3(t) = C_1C_2(a_0t + v_0)^2 \quad (49)$$

selanjutnya mengsubtitusikan $a_1(t), a_2(t)$ dan $a_3(t)$ ke dalam persamaan (16), untuk persamaan $\widehat{D}_0x(t) = 0,$ untuk memperoleh Lagrangian Nonstandar

$$L_{ns}(\dot{x}, x, t) = \frac{1}{a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x + a_3(t)}$$

$$L_{ns}(\dot{x}, x, t) = \frac{1}{C_1(a_0t + v_0)^3\dot{x} - C_1a_0(a_0t + v_0)^2x + C_1C_2(a_0t + v_0)^2}$$

$$L_{ns}(\dot{x}, x, t) = \frac{1}{C_1(a_0t + v_0)^2}\frac{1}{(a_0t + v_0)\dot{x}' - a_0x + C_2} \quad (50)$$

ini merupakan contoh pertama Lagrangian Nonstandar untuk Hukum Inersia Newton yang diturunkan bergantung pada dua konstanta yakni a_0 dan v_0, yang diberikan oleh kondisi awal untuk $\ddot{v}(t) = 0$ dan dua konstanta arbitrer C_1 dan C_2, yang dapat ditentukan oleh kondisi awal untuk $\widehat{D}_0x = 0,$ untuk memverifikasi $L_{ns}(\dot{x}, x, t)$ memberikan $\widehat{D}_0x(t) = 0$ ketika diganti dengan persamaan *Euler-Lagrange*. Lagrangian *Null* Nonstandar $L_{nsgn}(\dot{x}, x, t)$ dan fungsi *Gauge*nya $\phi_{sngn}(x, t)$ diberikan oleh persamaan (22) dan (21), agar Lagrangian *Null* Nonstandar dan fungsi *Gauge*nya eksak, maka perlu mematuhi kondisi seperti pada persamaan (31) dan (32), dimana :

$\left[\frac{h_1(t_e)}{h_2(t_e)}\right]\ln|h_2(t_e)x_e + h_4(t_e)| = 0,$ dan

$\left[\frac{h_1(t_o)}{h_2(t_o)}\right]\ln|h_2(t_o)x_o + h_4(t_o)| = 0$

selanjutnya disubtitusikan nilai dari $t_e = 1, x_e = 2,$ $t_o = 0,$ $x_o = 1$ pada kedua persamaan tersebut, sehingga diperoleh

$$\phi_{NEIN}(2,1) = \left[\frac{h_1(1)}{h_2(1)}\right]\ln|h_2(1)2 + h_4(1)| = 0$$

$$\phi_{NEIN}(2,1) = \left[\frac{h_1(1)}{h_2(1)}\right]\ln|2h_2(1) + h_4(1)| = 0 \quad (51)$$

dan

$$\phi_{NEIN}(0,1) = \left[\frac{h_1(0)}{h_2(0)}\right]\ln|h_2(0)1 + h_4(0)| = 0$$

$$\phi_{NEIN}(0,1) = \left[\frac{h_1(0)}{h_2(0)}\right]\ln|h_2(0) + h_4(0)| = 0, \quad (52)$$

karena $\ln[h_2(1) + h_4(1)] \neq 0$ dan $\ln[h_2(0) + h_4(0)] \neq 0,$ nilai akhir fungsi $h_1(t)$ harus $h_1(1) = 0$ dan $h_1(0) = 0$, nilai akhir dari $h_2(t)$ atau $h_4(t)$ tidak dibatasi oleh kondisi eksak,

$$L_{NEIN}(\dot{x}, x, t) = \frac{d\phi_{NEIN}(2,1)}{dt}$$

$$L_{NEIN}(\dot{x}, x, t) = \frac{0[h_2(1)2 + \dot{h}_2(1)2]h_4(1)}{(h_2(1)[h_2(1)2 + h_4(1)])} + \left[\frac{0}{h_2(1)} - \frac{0[\dot{h}_2(1)]}{h_2^2(1)}\right]ln|h_2(1)2 + h_4(1)| = 0 \quad (53)$$

dan

$$L_{NEIN}(\dot{x}, x, t) = \frac{d\phi_{NEIN}(0,1)}{dt}$$

$$L_{NEIN}(\dot{x}, x, t) = \frac{0[h_2(0) + \dot{h}_2(0)]h_4(0)}{(h_2(0)[h_2(0) + h_4(0)])} + \left[\frac{0}{h_2(0)} - \frac{0[\dot{h}_2(0)]}{h_2^2(0)}\right]ln|h_2(0) + h_4(0)| = 0, \quad (54)$$

persamaan (53) dan (54) merupakan Lagrangian *Null* Nonstandar Eksak untuk Hukum Inersia Newton (LNEIN)

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan kajian yang dilakukan, Lagrangian *Null* Eksak dapat diperoleh jika fungsi *Gauge*nya membuat invarian aksi yang bertujuan memberikan batasan pada nilai akhir dari fungsi arbitrer, selanjutnya diterapkan pada persamaan diferensial biasa (PDB) yang merepresentasikan Hukum *Inersia* Newton di mana Lagrangian *Null* Nonstandar umum Eksak dan Fungsi *Gauge* umum Eksak yang sesuai diturunkan. Ditunjukkan bahwa Lagrangian Nonstandar $\widehat{D}x(t) = 0$ yang merepresentasikan Hukum *Inersia* Newton adalah Lagrangian *Null* Nonstandar Eksak untuk Hukum Inersia Newton diperoleh.

DAFTAR PUSTAKA

Almén, A. (2020). *Helmholtz Conditions and The Inverse Problem for Lagrangian Mechanics.*Karlstad University Faculty Of Health, Science and Technology.

Arnold, V. (1978). *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* New York, NY, USA: Springer.

Cline, D. (2022). *Variational Principles In Classical Mechanics.* California: University Of Rochester.

Das , R., & Musielak, Z. (2022). *General Null Lagrangians and Their Novel Role in Classical Dynamics*. Department of Physics and Earth

Space Science, The University of Indianapolis, Indianapolis, IN 46227, USA.

Davachi, N., & Musielak , Z. E. (2019). *Generalized Non-Standard Lagrangians*. Department of Physics, The University of Texas at Arlington, Arlington, TX 76019, USA.

Doughty, N. (1990). *Lagrangian Interaction*. Westview Press. p. 449.

Landau, L., & Lifshitz, E. (1972). *Mechanics and Electrodynamics* . Pergamon: Oxford.

Gauthier, R. (2017). *Inertia Explained*. Santa Rosa Junior College.

Gianquinta, M., & Hilbedbrandt, S. (1996). *Calculus Of Variations I.* Berlin : Springer.

J.P. Gauthier, d. (2010). *A Biomechanical Inactivation Principle*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 93–116.

Musielak , Z., Davachi , N., & Maria. (2020). S*pecial Functions of Mathematical Physics*: A Unified. Department of Physics, University of Texas at Arlington, Arlington, TX 76019, USA;.

Musielak, Z. (2009). *General Conditions For The Existence Of Non-Standard Lagrangians For Dissipative Dynamical Systems*. Department of Physics, The University of Texas at Arlington, Arlington, TX 76019, USA.

Musielak, Z. E. (2008). *Standard And Non-Standard Lagrangians For Dissipative Dynamical Systems With Variable Coefficients.* Journal Of Physics A: Mathematical and Theoretical.

Musielak, Z. E. (2020). *Null Lagrangians and Invariance of Action: Exact.* Department of Physics, The University of Texas at Arlington, Arlington, TX 76019, USA.

Musielak, Z. E. (2021). *Nonstandard Null Lagrangians and Gauge Functions for Newtonian Law of Inertia*. Department of Physics, The University of Texas at Arlington, Arlington, TX 76019,USA.

Penrose, R. (2004). *For An Alternative Formulation In Terms Of Symmetries Of The Lagrangian Density*.

P. Caldirola, *"Forze non conservative nella meccanica quantista"*, Nuovo Cim., 18, 393, 1941.

Perkins, D. H. (1982). *Introduction To High-Energy Physics.* Addison-Wesley.

Pickering, A. (1984). *Conrtructing Quarks*. Universty Of Chicago Press.

Rizzuti, B., & Vasconcelos Jr, G. (2022). *Classical Gauge Principle-From Field Theories to Classical Mechanics*. Departamento de F´ısica, Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, Brazil.

Segovia, A., Vestal , L., & Musielak, Z. (2022). *Nonstandard Null Lagrangians and Gauge Functions and Dissipative Forces in Dynamics*. Department of Physics, University of Texas at Arlington, Arlington, TX 76019, USA.

Sudiarta, I.W.(2012).*Mekanika Kuantum.* Mataram: Program Studi Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mataram.

Tipler, P.(1998). *Fisika untuk Sains dan Teknik, Edisi ketiga Jilid I.* Jakarta: Erlangga.

Verlinde, E. (2011). *On The Origin Of Gravity And The Laws Of Newton*. Institute for Theoretical Physics, University of Amsterdam,Valckenierstraat 65, 1018 XE, Amsterdam, The Netherlands.

Vilmala, B. K. (2020). *Revolusi Saintifik dalam Perkembangan Mekanika*. Jurnal Filsafat Indonesia.