PERSAMAAN MEDAN VEKTOR ABELIAN YANG BERINTERAKSI DENGAN MEDAN GRAVITASI DALAM TELEPARALLEL GRAVITY DENGAN METRIK BIANCHI TIPE I

***Nitra Yulius*[1], *Muhamad Alhafish*[2]**

[1]*Fakultas Teknik, Universitas Samudra*

[2]*KK Fisika Teoretik Energi Tinggi dan Instrumentasi*

FakultasMatematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Institut Teknologi Bandung

e-mail: nitra.physics@gmail.com

Abstrak

Teleparallel gravity merupakan teori gauge dari grup translasi. Dalam teori ini torsi berperan sebagai representasi dari medan gravitasi dengan menggunakan asumsi bahwa kelengkungan dari ruang waktu dianggap bernilai nol dan medan tetrad dianggap sebagai faktor dari eksistensi medan gravitasi menggantikan metrik. Teleparallel gravity dianggap sebagai teori yang dapat digunakan untuk mendeskripsikan interaksi gravitasi dari medan-medan materi. Pada tugas akhir ini, preskripsi interaksi gravitasi menurut teleparallel gravity diterapkan pada vektor medan elektromagnetik dengan latar belakang metrik Bianchi tipe I. Persamaan medan vektor yang dihasilkan lalu dipecahkan dengan menggunakan faktor skala eksponensial berdasarkan asumsi bahwa metrik Bianchi tipe I tereduksi menjadi metrik FLRW datar untuk kasus isotropik. Solusi medan vektor kemudian dicari dengan menggunakan metode aproksimasi. Selanjutnya diperoleh bahwa frekuensi dari gelombang elektromagnetik tidak konstan, tetapi merupakan fungsi terhadap waktu. Untuk konstanta $b \to 0$, *solusi medan vektor tereduksi menjadi solusi gelombang bidang.*

Kata Kunci: *Teleparallel gravity, electromagnetic field, Bianchi type I metric, flat FLRW metric, Abelian vector field equation.*

Abstract

[Abelian vector field on teleparallel in Bianchi type I spacetime] *Teleparallel gravity is a gauge theory of translation group. In this theory torsion acts as a representation of the gravitational field by using the assumption that the curvature is zero and the tetrad field replacing metric as a factor of gravitational field's existence,. Teleparallel gravity is considered as a theory that can be used to describe the gravitational interaction of matter fields. In this final project, the gravitational interaction prescription defined in teleparallel gravity is applied to electromagnetic vector fields with the Bianchi type I metric as its background. The resulting vector field equations are then solved by using the exponential scale factor with the assumption that the Bianchi type I metric reduces to flat FLRW metric in the isotropic case. The solutions are extracted by using approximation method. We obtain that the frequency of the electromagnetic field is not constant but instead it depends on time (function of time). When the constant b approaches zero, the vector field solution reduces to the well-known plane wave solution.*

Keywords*: author guidelines; Physics journal; article template*

PENDAHULUAN

Teori relativititas umum merupakan suatu teori yang menjelaskan fenomena gravitasi sebagai akibat dari pelengkungan ruang-waktu di sekitar benda bermassa.Teori ini digagas oleh Einstein pada tahun 1916 sebagai generalisasi dari teori sebelumnya yaitu teori relativitas khusus.

Teori relativitas umum juga merupakan teori geometri dari gravitasi berdasarkan penggunaan parameter kelengkungan atau *curvature* dari geometri diferensial (*differential geometry*) sebagai manifestasi dari kehadiran medan gravitasi. Penemuan Eliè Cartan dalam bidang geometri diferensial mengenai adanya kemungkinan lain dari kurvatur yaitu *torsion* memberikan petunjuk bahwa teori alternatif (*non-Riemannian*) untuk medan gravitasi dapat dibangun. Geometri dari ruang-waktu Riemannian dapat diubah menjadi suatu ruang-waktu non-Riemannian dengan adanya penambahan torsi & non-metrisitas (*non-metricity*). Teori Relativitas Umum Einstein merupakan teori yang berbasis terhadap kurvatur dengan koneksi Levi-Civita yang kompatibel terhadap metrik (*metric compatible*) dan tidak ada pengaruh torsi. Kompatibilitas metrik mengimplikasikan $Q=0$, dimana Q adalah non-metrisitas.

Pada tahun 1928, Albert Einstein melakukan percobaan untuk menyatukan interaksi gravitasi & elektromagnetik setelah percobaan yang dilakukan oleh Hermann Weyl pada 10 tahun sebelumnya tidak membuahkan hasil. Einstein menggunakan struktur matematis dari paralelisme absolut atau *distant paralellism* di mana beliau memperkenalkan medan tetrad, suatu medan dari basis ruang *tangent* yang saling ortonormal di setiap titik di ruang waktu empat dimensi.

TEORI DASAR

Teleparallel gravity adalah suatu teori gauge dari grup translasi. Konstruksi geometri dari teori ini adalah *bundle tangent* dimana terdapat ruang *tangent* Minkowski yang terlampir pada setiap titik x^{μ} dari ruang waktu. Komponen utama dari *Teleparallel gravity* adalah medan tetrad & *torsion*. Perbedaaan *Teleparallel gravity* dengan Relativitas Umum adalah *Teleparallel gravity* mengasumsikan bahwa kurvatur bernilai nol dalam dan *torsion* merupakan representasi dari gaya gravitasi. Ini merupakan konsekuensi dari *Teleparallel gravity* sebagai teori *gauge*.

Tetrad menghubungkan tensor metrik dan metrik Minkowski lewat hubungan berikut

$$\eta_{ab} = g\left(h_a, h_b\right) = h_a{}^{\mu} h_b{}^{\nu} g_{\mu\nu} \tag{1}$$

Teleparallel gravity dapat mendeskripsikan interaksi medan elektromagnetik & torsion secara konsisten. Lagrangian medan elektromagnetik dalam ruang waktu Minkowski adalah

$$L_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{2}$$

dengan

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \tag{3}$$

adalah tensor medan elektromagnetik.

Dengan menerapkan persamaan (4) terhadap medan vektor elektromagnetik,

$$\partial_{\mu} A^{\rho} \rightarrow \dot{D}_{\mu} A^{\rho} = \partial_{\mu} A^{\rho} + \left(\dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\nu\mu} - \dot{K}^{\rho}{}_{\nu\mu} \right) A^{\nu} \tag{4}$$

Hasilnya adalah

$$\begin{aligned} \dot{F}_{\mu\nu} &= \dot{D}_{\mu} A_{\nu} - \dot{D}_{\nu} A_{\mu} \\ &= \partial_{\mu} A_{\nu} - \left(\dot{\Gamma}^{\lambda}{}_{\nu\mu} - \dot{K}^{\lambda}{}_{\nu\mu} \right) A_{\lambda} - \partial_{\nu} A_{\mu} + \left(\dot{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \dot{K}^{\lambda}{}_{\mu\nu} \right) A_{\lambda} \\ &= \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}. \end{aligned} \tag{5}$$

Gauge Lorenz versi teleparallel adalah seperti berikut

(9)

$$\dot{D}_{\mu} A^{\mu} = 0. \tag{6}$$

Hubungan komutasi dari turunan kovarian teleparallel

$$\left[\dot{D}_{\mu}, \dot{D}_{\nu} \right] A^{\mu} = -\dot{Q}_{\mu\nu} A^{\mu} \tag{7}$$

Dengan

$$\left[\dot{D}_{\mu}, \dot{D}_{\nu} \right] A^{\mu} = \dot{D}_{\mu} \dot{D}_{\nu} A^{\mu} - \dot{D}_{\nu} \dot{D}_{\mu} A^{\mu} \tag{8}$$

Substitusi (7) ke dalam persamaan (8) menghasilkan

$$\dot{D}_{\mu} \dot{D}_{\nu} A^{\mu} + \dot{Q}_{\mu\nu} A^{\mu} = 0$$

dengan tensor $\dot{Q}_{\mu\nu} = \dot{Q}^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}$

$$\begin{aligned} \dot{Q}^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} = {} & \partial_{\rho} \dot{K}^{\rho}{}_{\mu\nu} - \partial_{\nu} \dot{K}^{\rho}{}_{\mu\rho} + \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\rho} \dot{K}^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \dot{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\nu} \dot{K}^{\sigma}{}_{\mu\rho} \\ & - \dot{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\rho} \dot{K}^{\rho}{}_{\sigma\nu} + \dot{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \dot{K}^{\rho}{}_{\sigma\rho} + \dot{K}^{\rho}{}_{\sigma\nu} \dot{K}^{\sigma}{}_{\mu\rho} - \dot{K}^{\rho}{}_{\sigma\rho} \dot{K}^{\sigma}{}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{10}$$

Diperoleh

$$\dot{D}_{\mu} \dot{D}^{\mu} A_{\nu} + \dot{Q}^{\mu}{}_{\nu} A_{\mu} = 0 \tag{11}$$

Persamaan (11) merupakan persamaan Maxwell dalam Teleparallel Gravity dengan vektor potensial A_μ.

Metrik yang digunakan adalah metrik Bianchi tipe I

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^{3}\left[a_i\left(t\right)dx^i\right]^2 \tag{12}$$

Faktor skala yang digunakan adalah faktor skala eksponensial. Perangkat matematis yang berkaitan dengan *teleparallel gravity* adalah tensor *torsion*, tensor kontorsi dan koneksi Weitzenböck.

Komponen tidak nol dari tensor *torsion*, tensor kontorsi dan koneksi Weitzenböck dalam ruang waktu Bianchi tipe I adalah seperti berikut

Tensor *torsion*

$$\overset{\bullet}{T}{}^{1}{}_{01} = \frac{\dot{a}_1}{a_1}, \overset{\bullet}{T}{}^{2}{}_{02} = \frac{\dot{a}_2}{a_2}, \overset{\bullet}{T}{}^{3}{}_{03} = \frac{\dot{a}_3}{a_3} \tag{13}$$

Tensor kontorsi

$$\overset{\bullet}{K}{}^{1}{}_{01} = -\frac{\dot{a}_1}{a_1}, \overset{\bullet}{K}{}^{2}{}_{02} = -\frac{\dot{a}_2}{a_2}, \overset{\bullet}{K}{}^{3}{}_{03} = -\frac{\dot{a}_3}{a_3}, \tag{14}$$

Koneksi Weitzenböck

$$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{1}{}_{10} = \frac{\dot{a}_1}{a_1}, \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{2}{}_{20} = \frac{\dot{a}_2}{a_2}, \overset{\bullet}{\Gamma}{}^{3}{}_{30} = \frac{\dot{a}_3}{a_3} \tag{15}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan medan vektor Abelian yang berinteraksi dengan medan gravitasi adalah

$$\overset{\bullet}{D}_\mu \overset{\bullet}{D}{}^\mu A_0 + Q^\mu{}_0 A_\mu = \left(\partial_0{}^2 - \frac{1}{e^{2bt}}\nabla^2\right)A_0 + 5b\partial_0 A_0 = 0 \tag{16}$$

$$\overset{\bullet}{D}_\mu \overset{\bullet}{D}{}^\mu A_1 + Q^\mu{}_1 A_\mu = \left(\partial_0{}^2 - \frac{1}{e^{2bt}}\nabla^2\right)A_1 + 3b^2 A_1 + 3b\partial_1 A_0 = 0 \tag{17}$$

$$\overset{\bullet}{D}_\mu \overset{\bullet}{D}{}^\mu A_2 + Q^\mu{}_2 A_\mu = \left(\partial_0{}^2 - \frac{1}{e^{2bt}}\nabla^2\right)A_2 + 3b^2 A_2 + 3b\partial_2 A_0 = 0 \tag{18}$$

$$\overset{\bullet}{D}_\mu \overset{\bullet}{D}{}^\mu A_3 + Q^\mu{}_3 A_\mu = \left(\partial_0{}^2 - \frac{1}{e^{2bt}}\nabla^2\right)A_3 + 3b^2 A_3 + 3b\partial_3 A_0 = 0 \tag{19}$$

Persamaan (16), (17), (18) dan (19) diselesaikan dengan menggunakan metode separasi dan aproksimasi WKB. Berikut merupakan hasil dari penyelesaian persamaan (16), (17), (18), dan (19) dengan menggunakan metode separasi variabel dan aproksimasi WKB.

Metode separasi variabel:

$$A_0\left(x,y,z,t\right) = C_1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-\frac{5}{2}bt} J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{ke^{-bt}}{b}\right) + C_3 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-\frac{5}{2}bt} J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{ke^{-bt}}{b}\right) \tag{20}$$

$$A_1(x,y,z,t) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} J_{i\sqrt{3}}\left(\frac{ke^{-bt}}{b}\right) \pm \frac{6ik_1 b}{2k^2e^{-2bt}+6b^2-3b^2k^2-2ke^{-3bt}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{k}{b}e^{-bt}\right) + Ae^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} J_{i\sqrt{3}}\left(\frac{ke^{-bt}}{b}\right) \pm \frac{6ik_1 b}{2k^2e^{-2bt}+6b^2-3b^2k^2-2ke^{-3bt}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{k}{b}e^{-bt}\right) \tag{21}$$

$$A_2(x,y,z,t) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} J_{i\sqrt{3}}\left(\frac{ke^{-bt}}{b}\right) \pm \frac{6ik_2 b}{2k^2e^{-2bt}+6b^2-3b^2k^2-2ke^{-3bt}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{k}{b}e^{-bt}\right) + Ae^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} J_{i\sqrt{3}}\left(\frac{ke^{-bt}}{b}\right) \pm \frac{6ik_2 b}{2k^2e^{-2bt}+6b^2-3b^2k^2-2ke^{-3bt}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{k}{b}e^{-bt}\right) \tag{22}$$

$$A_3(x,y,z,t) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} J_{i\sqrt{3}}\left(\frac{ke^{-bt}}{b}\right) \pm \frac{6ik_3 b}{2k^2e^{-2bt}+6b^2-3b^2k^2-2ke^{-3bt}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{k}{b}e^{-bt}\right) + Ae^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} J_{i\sqrt{3}}\left(\frac{ke^{-bt}}{b}\right) \pm \frac{6ik_3 b}{2k^2e^{-2bt}+6b^2-3b^2k^2-2ke^{-3bt}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} J_{\frac{5}{2}}\left(\frac{k}{b}e^{-bt}\right) \tag{23}$$

Metode aproksimasi WKB:

$$A_0(x,y,z,t) = Ae^{-2bt} e^{i\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \frac{2ke^{-\frac{bt}{2}}\sinh\left(\frac{bt}{2}\right)}{b}\right]} + Be^{-2bt} e^{i\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \frac{2ke^{-\frac{bt}{2}}\sinh\left(\frac{bt}{2}\right)}{b}\right]} + Ce^{-2bt} e^{-i\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \frac{2ke^{-\frac{bt}{2}}\sinh\left(\frac{bt}{2}\right)}{b}\right]} + De^{-2bt} e^{-i\left[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \frac{2ke^{-\frac{bt}{2}}\sinh\left(\frac{bt}{2}\right)}{b}\right]} \tag{24}$$

$$A_1(x,y,z,t) = \pm \frac{3ik_1 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{2-\frac{13b^2}{2k^2}} \int_{t_0}^{t} e^{-2bt' - \frac{2ike^{-\frac{bt'}{2}}\sinh\left(\frac{bt'}{2}\right)}{b}} e^{-\frac{2ik\sinh b(t-t')}{b} - b(t-t') - \frac{13ib\sinh b(t-t')}{4k} + \frac{13b^2\sinh 2b(t-t')}{8k^2}} dt'$$
$$\pm \frac{3ik_1 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{2-\frac{13b^2}{2k^2}} \int_{t_0}^{t} e^{-2bt' - \frac{2ike^{-\frac{bt'}{2}}\sinh\left(\frac{bt'}{2}\right)}{b}} e^{\frac{2ik\sinh b(t-t')}{b} - b(t-t') + \frac{13ib\sinh b(t-t')}{4k} + \frac{13b^2\sinh 2b(t-t')}{8k^2}} dt' \quad (25)$$

$$A_2(x,y,z,t) = \pm \frac{3ik_2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{2-\frac{13b^2}{2k^2}} \int_{t_0}^{t} e^{-2bt' - \frac{2ike^{-\frac{bt'}{2}}\sinh\left(\frac{bt'}{2}\right)}{b}} e^{-\frac{2ik\sinh b(t-t')}{b} - b(t-t') - \frac{13ib\sinh b(t-t')}{4k} + \frac{13b^2\sinh 2b(t-t')}{8k^2}} dt'$$
$$\pm \frac{3ik_2 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{2-\frac{13b^2}{2k^2}} \int_{t_0}^{t} e^{-2bt' - \frac{2ike^{-\frac{bt'}{2}}\sinh\left(\frac{bt'}{2}\right)}{b}} e^{\frac{2ik\sinh b(t-t')}{b} - b(t-t') + \frac{13ib\sinh b(t-t')}{4k} + \frac{13b^2\sinh 2b(t-t')}{8k^2}} dt' \quad (26)$$

$$A_3(x,y,z,t) = \pm \frac{3ik_3 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{2-\frac{13b^2}{2k^2}} \int_{t_0}^{t} e^{-2bt' - \frac{2ike^{-\frac{bt'}{2}}\sinh\left(\frac{bt'}{2}\right)}{b}} e^{-\frac{2ik\sinh b(t-t')}{b} - b(t-t') - \frac{13ib\sinh b(t-t')}{4k} + \frac{13b^2\sinh 2b(t-t')}{8k^2}} dt'$$
$$\pm \frac{3ik_3 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{2-\frac{13b^2}{2k^2}} \int_{t_0}^{t} e^{-2bt' - \frac{2ike^{-\frac{bt'}{2}}\sinh\left(\frac{bt'}{2}\right)}{b}} e^{\frac{2ik\sinh b(t-t')}{b} - b(t-t') + \frac{13ib\sinh b(t-t')}{4k} + \frac{13b^2\sinh 2b(t-t')}{8k^2}} dt' \quad (27)$$

Apabila $b \to 0$ maka solusi yang diperoleh dari metode separasi variabel mendekati nol atau berubah menjadi solusi trivial. Hal ini bertentangan dengan prediksi bahwa solusi persamaan medan vektor Abelian akan tereduksi menjadi solusi gelombang bidang apabila $b \to 0$. Tetapi solusi dari metode aproksimasi WKB tereduksi menjadi solusi gelombang bidang apabila $b \to 0$. Hasil ini sesuai dengan persamaan medan vektor itu sendiri: medan vektor Abelian tereduksi menjadi persamaan gelombang apabila $b \to 0$. Dapat diperhatikan bahwa frekuensi dari medan elektromagnetik merupakan fungsi hiperbolik dari waktu dan amplitudo medan mendekati nol apabila $t \to \infty$.

KESIMPULAN

Dari hasil perhitungan didapatkan persamaan medan vektor Abelian (dalam hal ini adalah medan elektromagnetik) yang berinteraksi dengan medan gravitasi. Hasil dari interaksi ini adalah frekuensi dari medan elektromagnetik merupakan fungsi hiperbolik dari waktu, bukan suatu konstanta apabila interaksi gravitasi diabaikan ($b \to 0$) dan amplitudo medan meluruh seiring dengan berjalannya waktu.

DAFTAR PUSTAKA

Aldrovandi, R. dan Pereira, J. G., *An Introduction to Teleparallel Gravity*, Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, Brazil, Desember 2010 URL http://www.ift.unesp.br/users/jpereira/tele.pdf

Albert Einstein, *Riemannian Geometry with Maintaining the Notion of Distant Parallelism*, Session report of the Prussian Academy of Sciences, pp. 217 -221, June 7th, 1928 (translation by A. Unzicker dan T. Case [http://www.alexander-unzicker.de/rep1.pdf]).

Albert Einstein, *New Possibility For A Unified Field Theory Of Gravitation And Electricity*, Session report of the Prussian Academy of Sciences, pp. 217 -221, June 14th, 1928 (translation by A. Unzicker dan T. Case [http://www.alexander-unzicker.de/repII.pdf])

C. M. Bender, S. A. Orszag (1978), *Advanced Mathematical Methods For Scientists And Engineers*, McGraw-Hill Book Company.

F. de Felice (1990), C. J. S. Clarke, *Relativity on Curved Manifolds*, Cambridge University Press.

M. Nakahara (2003), *Geometry, Topology, and Physics*, 2nd ed.: IOP Publishing

Robert M. Wald (1984), *General Relativity*, The University of Chicago Press.

S. Chandrasekhar (1983), *The Mathematical Theory of Black Hole*, Oxford University Press.

V. C. de Andrade dan J. G. Pereira, arxiv.org/abs/gr-qc/9708051

Y. Mao, M. Tegmark, A. H. Guth, S. Cabi, (2007),Phys. Rev. D **76**, 104029.