ANALISIS FUNGSI KORELASI KLASIK DAN KUANTUM UNTUK MODEL CINCIN: SEBUAH *REVIEW*

Ayu Ningsih P. A. Sunaryo[1*], Herry F. Lalus[1], Hartoyo Yudhawardana[1]

[1]*Program Sudi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Nusa cendana, Kupang, 85000, Indonesia*

*email: ayusunaryo59@gmail.com

ABSTRAK

Telah dilakukan riview jurnal dengan judul 'Classical And Quantum Correlation Functions For A Ring Model' yang membahas tentang solusi fungsi korelasi klasik dan kuantum untuk model cincin. Fungsi korelasi klasik dan kuantum diturunkan untuk sistem partikel yang tidak berinteraksi yang bergerak pada lingkaran. Menunjukkan bahwa perilaku meluruh dari ekspresi klasik untuk fungsi korelasi dapat diperoleh kembali dari ekspresi mekanika kuantum periodik ketat dengan mengambil limit $\hbar \to 0$, *setelah transformasi yang sesuai. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menyajikan secara jelas dan terperinci bagaimana fungsi korelasi posisi untuk sistem partikel yang bergerak pada lingkaran yang memiliki energi rata-rata tertentu dan ditulis dalam bentuk yang menunjukkan sifat transformasinya. Selanjutnya, dikaji penggunaan penjumlahan poisson untuk merepresentasikan* $F(z)$, *dan bagaimana fungsi korelasi menjadi identik dengan bentuk yang diberikan oleh mekanika statistika klasik, yang menunjukkan peluruhan Gaussian. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa fungsi korelasi posisi untuk sistem partikel yang bergerak pada lingkaran, dan memiliki energi rata-rata tertentu, dapat ditulis dalam bentuk yang menunjukkan sifat transformasinya. Kemudian dengan menggunakan rumus penjumlah Poisson untuk merepresentasikan* $F(z)$, *ekspresi ditulis ulang untuk mengaktifkan limit* $\hbar \to 0$ *yang akan diambil. Akhirnya diperoleh bahwa fungsi korelasi menjadi identik dengan bentuk yang diberikan oleh mekanika statistik klasik, yang menunjukkan peluruhan gaussian.*

Kata kunci: *Model cincin; Fungsi Korelasi; Penjumlahan Poisson; Integral Parsial Gaussian; Mekanika Statistika Klasik*

ABSTRACT

[Title: Analysis of Classic and Quantum Correlation Functions for Ring Models: A Review] *A review of the journal entitled 'Classical And Quantum Correlation Functions For A Ring Model' has been carried out which discusses the solutions of classical and quantum correlation functions for the ring model. Classical and quantum correlation functions are derived for systems of non-interacting particles moving in a circle. demonstrated that the decay behavior of the classical expression for the correlation function can be recovered from a strictly periodic quantum mechanical expression by taking the limit* $\hbar \to 0$, *after the appropriate transformation. The aim of this study is to present clearly and in detail how the position correlation function for a system of particles moving in a circle having a certain average energy and written in a form which shows the nature of the transformation. Next, we examine the use of Poisson addition to represent F(z), and how the correlation function becomes identical to the form given by classical statistical mechanics, which exhibits Gaussian decay. The results of this study indicate that the positional correlation function for a system of particles moving in a circle, and having a certain average energy, can be written in a form which shows the nature of the transformation. Then using the Poisson addition formula to represent F(z), the expression is rewritten to enable the limit* $\hbar \to 0$ *to be taken. It was finally found that the correlation function became identical to the form given by classical statistical mechanics, which exhibits a Gaussian decay.*

Keywords: *Ring model; Correlation Function; Poisson addition; Gaussian Partial Integral; Classical Statistical Mechanics*

PENDAHULUAN

Teori fundamental yang mendeskrisikan sifat fisik alam pada skala yang sangat kecil serta merupakan dasar dari fisika kuantum, dan teori medan kuantum merupakan mekanika kuantum. Partikel dalam cincin satu dimensi identik dengan partikel dalam kotak pada mekanika kuantum. Sebuah model gas tidak berinteraksi terbatas yang bergerak pada keliling lingkaran, menurut Frisch merupakan model atom cincin (HL Frisch, 1958). Kita dapat mempelajari perubahan waktu rata-rata partikel pada model cincin ini. Dengan demikian, dapat ditetapkan bagaimana berbagai rata-rata pada kondisi awal tertentu mendekati nilai keseimbangan. Dengan mempertimbangkan model Frisch, penelitian ini menunjukkan bahwa untuk evolusi waktu dari berbagai operator pada persamaan mekanika kuantum dapat diselesaikan dengan tepat dan juga dapat membentuk fungsi korelasi untuk operator.

Dalam penelitian ini, peneliti lebih mempertimbangkan model Frisch dan menunjukkan bahwa persamaan mekanika kuantum untuk evolusi waktu dari berbagai operator dapat diselesaikan dengan tepat. Fungsi korelasi untuk operator ini juga dapat dibentuk, sedangkan untuk rumus penjumlahan Poisson dapat digunakan untuk menunjukkan bagaimana keadaan yang tampak antara sifat periodik yang ketat dari solusi kuantum dan peluruhan *ireversibel* (tidak dapat diubah) yang mencirikan solusi klasik dapat diselesaikan dengan cara yang tepat.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode Hamiltonian. Dalam metode ini lebih memfokuskan pada penyelesaian masalah-masalah yang rumit dengan cara yang lebih sederhana dan sistematis. Oleh karena itu, metode Hamiltonian adalah metode yang tepat untuk menyelesaikan masalah yang sedang diteliti oleh peneliti yang diselesaikan dengan langkah-langkah yang sistematis dan terperinci. Berikut langkah-langkah dalam menganalisis fungsi korelasi klasik dan kuantum untuk model cincin yaitu: menggunakan rumus Hamiltonian dalam menentukan solusi untuk operator posisi yang dapat diturunkan dalam bentuk ekivalen,menggunakan Hamiltonian untuk sistem yang menganggap *N* partikel titik tidak berinteraksi dengan massa identik *m*pada lingkaran, kemudian menentukan matriks kerapatan menurut prinsip entropi maksimum,menentukan estimasi terbaik untuk nilai ekspektasi dari sembarang operator $A(t)$, yaitu dalam mekanika klasik $A(t)$ ditentukan dengan cara memecahkan persamaan gerak Lagrange atau Hamiltonian dan dalam mekanika kuantum $A(t)$ adalah solusi dari persamaan Heisenberg, menentukan fungsi korelasi C_1dan C_2 menggunakan solusi operator untuk $x(t)$, membuat representasi alternatif dengan menggunakan persamaan Poisson dan membalikkan skala waktu yang sesuai, menghasilkan kesetaraan yang jelas pada bentuk pertama C_1 dan bentuk ke-dua C_1 menunjukkan peluruhan Gaussian, dan membandingkan ekspresi limit klasik C_1 menggunakan mekanika statistik klasik untuk membuktikan bahwa limit fungsi korelasi C_1 dan C_2 adalah identik dan menunjukkan peluruhan Gaussian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Analisis Model Cincin

Untuk menghitung Hamiltonian pada partikel bermassa *m* yang terkurung dalam orbit melingkar dengan jari-jari *R* kita dapat mentransformasikan koordinat *x* dan *y* ke *R* dan ϕdengan hasil tranformasi yang diperoleh

$$x = R\cos\phi \text{ dan } y = R\sin\phi. \quad (1)$$

Kemudian kita turunkan *x* dan *y* terhadap dt, maka didapatkan $\dot{x} = R\,\dot{\phi}\sin\phi$ dan $\dot{y} = -R\,\dot{\phi}\cos\phi$. Setelah itu kita akan menentukan nilai energi kinetik dengan mensubstitusikan nilai $\dot{x}$ dan $\dot{y}$ kedalam nilai v sehingga

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (2)$$

Kemudian kita substitusikan nilai *x* dan *y*, dan karena $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ dan R konstan, kita dapatkan:

$T = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi)\right)$. Energi kinetiknya menjadi:

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2. \quad (3)$$

Selanjutnya, kita menghitung Lagrange dengan mengabaikan potensialnya dan hanya berpengaruh pada koordinat ϕ maka $H = P_\alpha\dot{\phi} - \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2$. Kita dapatkan nilai $P_\phi = mR^2\dot{\phi}$ atau $\dot{\phi} = \frac{P_\phi}{mR^2}$. Selanjutnya nilai P_ϕ yang diperoleh disubstitusikan ke persamaan sebelumnya menghasilkan $H = \frac{1}{2}\frac{P_\phi^2}{mR^2}$. Karena gerak hanya terjadi pada sudut, P_ϕ merupakan momentum sudut maka $P_\phi = L = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$, maka dapat ditulis menjadi

$$H = \frac{L^2}{2mR^2}. \quad (4)$$

Dan ketika ϕ merupakan posisi sudut partikel, kita dapat mengkomutasikan $[\phi, L]$ dan mendapatkan hasilnya sama dengan $i\hbar$.

Untuk operator *E* dapat kita defenisikan dengan $E = e^{i\phi}$harus memenuhi $[E, L] = -\hbar E$.

Ini dapat diselesaikan dengan menggunakan turunan parsial. Pada persamaan gerak Heisenberg untuk operator E di dapat dengan cara mengkomutasikan $[E, H]$, dengan menstubtitusikan nilai H seperti pada persamaan (4) dengan L merupakan momentum sudut menghasilkan

$$[E, H] = \frac{-\hbar}{2mR^2}(EL + LE), \quad (5)$$

dengan solusi formal, kita gunakan persamaan (5), maka didapatkan $ln\, E - ln\, E_0 = \frac{i}{2mR^2} 2Lt$. Kita eksponensialkan kedua ruas sehingga menjadi $E = E_0 e^{\frac{i}{2mR^2}2Lt}$ atau dapat kita tulis menjadi

$$E = e^{\frac{iLt}{2mR^2}} E_0\, e^{\frac{iLt}{2mR^2}}. \quad (6)$$

Operator *E(t)* juga dapat ditulis dalam bentuk alternatif, yaitu $E(t) = E(0)\frac{it}{e^{2mR^2}}(2L + \hbar)$dan $E(t) = E(0)\frac{it}{e^{2mR^2}}(2L - \hbar)\, E(0)$. Untuk E dan solusi yang sesuai untuk adjoint Operator $E^\dagger$, ekspresi untuk operator posisi kartesius $x = R \cos \phi$ dan $y = R \sin \phi$ dapat kita turunkan dalam bentuk yang setara dengan mendefenisikan operator $E = e^{i\phi}$, maka diperoleh $x^2 + y^2 = r^2$, kemudian hasil yang diperoleh kita turunkan terhadap dx dan dy, sehingga kita dapatkan, $\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}$ dan $\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}$. Kita turunkan hasil yang diperoleh terhadap dx dan dy, untuk mencari fungsi ϕ maka didapat $\frac{dr}{dx} = cos\, \phi$ dan $\frac{dr}{dy} = sin\, \phi$, sehingga fungsi ϕ dari $\frac{x}{r}$ menjadi $\phi = tan^{-1}\frac{y}{x}$.Kemudian kita turunkan fungsi ϕ terhadap dx dan dy, maka didapat $\frac{d\phi}{dx} = \frac{-sin\, \phi}{r}$ dan $\frac{d\phi}{dy} = \frac{cos\, \phi}{r}$.Kemudian untuk mencari $x(t)$ dan $y(t)$ kita misalkan $\frac{du}{dx} = x(t)$; $\frac{\partial u}{\partial r} = x(0); \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi} = y(0)$ dan $\frac{du}{dy} = y(t)$; $\frac{\partial u}{\partial r} = x(0); \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \phi} = y(0)$, maka hasil yang didapat,

$$x(t) = x(0)\, cos\frac{lt}{mR^2} - y(0)\, sin\, \phi \text{ dan } y(t) = y(0)\, cos\, \phi + x(0)\, sin\, \phi. \quad (7)$$

Dalam model cincin kami menganggap N partikel titik yang tidak berinteraksi dengan massa identik m bergerak pada lingkaran dengan jari-jari R. Misalkan ϕi adalah posisi sudut pada lingkaran partikel i. Hamiltonian dari sistem ini, di mana $\frac{1}{2mR^2}\left({L_i}^2 + {L_2}^2 + \cdots + {L_n}^2\right)$. Maka,

$$H = \frac{1}{2mR^2}\sum_i {L_n}^2, \quad (8)$$

di mana L_i merupakan momentum sudut dari partikel ke i yang diwakili oleh $L_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \phi_i}$. Karena partikelnya tidak berinteraksi, sehingga Hamiltonian sudah dapat dipisahkan dalam koordinat partikel.

Oleh karena itu, dalam menentukan sifat sistem partikel N seperti energi rata-rata atau fungsi korelasi posisi untuk pusat massa, adalah mungkin untuk menghilangkan jumlah di atas label partikel. Dengan mempertimbangkan jika hanya satu partikel, tetapi memungkinkan posisi, energi, dll., ditentukan oleh fungsi distribusi tunggal atau matriks kepadatan partikel, rata-rata partikel tunggal dapat diatur sama dengan partikel N rata-rata. Jika, pada waktu $t = 0$, yang dapat diketahui hanya tentang energi rata-rata total $\bar{E}$.

Jika$N$ partikel adalah $N = \sum_{i=1}^{N} n_i$, di mana $i = 0,1,2, \dots, n$. Dengan probabilitas $P_i = \frac{n_i}{N}$ atau $\sum P_i = 1$, kita gunakan Stirling dan mneghasilkan $\sum_{i=1}^{N} - ln\, P_i + \alpha \sum_{i=1}^{N} n_i + \beta \sum_{i=1}^{N} E_i = 0$, selanjutnya kalikan semua ruas dengan P_i, kemudian dapat diturunkan terhadap $\frac{\partial}{\partial P_i}$, maka $\sum P_i = \sum e^{-\alpha}\, e^{-\beta E_i}$ dapat ditullis menjadi $e^{-\alpha} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} e^{-\beta E_i}}$. Dengan $P_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{\sum_{i=1}^{N} e^{-\beta E_i}}$, di mana $z = \sum e^{-\beta E_i}$, sehingga $P_i = \frac{1}{z} e^{-\beta E_i}$ dan $\rho = \sum_{i=1}^{N} P_i \langle \psi_i | \psi_i \rangle$ dengan $\langle \psi_i | \psi_i \rangle = 1 \rightarrow T_r \langle \psi_i | \psi_i \rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Maka defenisi matriks kepadatannya adalah

$$z = T_r\left(e^{-\beta E}\right). \quad (9)$$

Kemudian dengan memaksimalkan entropi $S = Tr(\rho\, ln\, \rho)$ kita dapat menentukan estimasi terbaik untuk nilai ekspektasi dari sembarang operator $A(t)$ dengan cara ketika $A_{(0)} = \sum P_i \left\langle \psi_{(t)} \middle| A^2 \middle| \psi_{(t)} \right\rangle$ maka $A(t) = T_r\left(\rho\, A(t)\right)$. Kemudian pada mekanika klasik *A(t)* dapat ditemukan dengan memecahkan Lagrangian atau Hamiltonian persamaan gerak. Kemudian pada mekanika kuantum $A(t)$ adalah solusi dari persamaan gerak Heisenberg yang dapat kita tuliskan menjadi:

$$A(t) = e^{\frac{iHt}{\hbar}} A(0) e^{-\frac{iHt}{\hbar}}. \qquad (10)$$

Analisis Fungsi Korelasi

Fungsi korelasi dari operator $A(z)$ dengan $A(0)$ dapat didefenisikan sebagai:

$$C_1(z) = \langle A(0)A(z)\rangle = Tr[A(0)A(z)\rho(0)],$$
$$C_2(z) = \langle A(z)A(0)\rangle = Tr[A(z)A(0)\rho(0)] \quad (11)$$

di mana *z* merupakan variabel waktu yang kompleks. Dengan menggunakan persamaan (9) dan (10), fungsi korelasi C_1 dapat ditulis dalam bentuk $C_1(z) = T_r\left[A(0)\, e^{\frac{iHt}{\hbar}} A(0) e^{\frac{-iHt}{\hbar}}\ \rho(0)\right]$, dengan $|\psi\rangle = e^{\frac{-iHt}{\hbar}}$ maka di peroleh

$$C_1(z) = Tr\left[e^{\frac{izH}{\hbar}} A(0) e^{-\frac{izH}{\hbar}} A(0) e^{-\beta H}\right]. (12)$$

Sifat invariant dari T_r dibawah permutasi siklik dapat kita gunakan untuk menunjukkan bahwa pembilang $C_1(-z)$ mengambil bentuk $C_1(-z) = T_r\, A(0)\, e^{i\left(\frac{z+i\hbar\beta}{\hbar}\right)H}\ A(0)\, e^{-i\left(\frac{-z+i\hbar\beta}{\hbar}\right)H} e^{-\beta H}$. Sehingga jika kita lihat pada persamaan (11) maka:

$$C_1(-z) = C_1(z+\beta\hbar) = C_2(z). \qquad (13)$$

Dapat dilihat bahwa persamaan (12) dan (13) adalah sama. Hubungan antara fungsi korelasi diatas adalah model fungsi korelasi yang independen dan valid jika matriks kerapatan awal memiliki bentuk kanonik yang diberikan oleh persamaan (9). Solusi operator untuk $x(t)$ yang diberikan dalam persamaan (7) kita boleh masukkan dalam persamaan pertama pada persamaan (11) untuk menghasilkan fungsi korelasi $x(0)$ dengan $x(t)$ pada saat energi awal ditentukan, yaitu $C_1(t) = \langle x(0)\, x(t)\rangle = \frac{Tr[x(0)\, x(t)\, e^{-\beta H}]}{Tr[e^{-\beta H}]}$.

Dasar yang tepat untuk evaluasi jejak adalah himpunan keadaan ortonormal, jika $x = r\cos\phi$ dan $y = r\sin\phi$, di mana r konstan maka $\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$. Menghasilkan $e^{in2\pi} = \cos 2n\pi + i\sin 2n\pi = 1$, di mana $\sin n\pi = 0$; $\cos 2n\pi = 1$; dan $n = 0, \pm1, \pm2, , \ldots$, maka diperoleh $\psi(\phi) = ne^{in\phi}$. Di mana $0 < \phi < 2\pi$, sehingga $n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Ini merupakan keadaan eigen *L* dengan nilai eigen $\hbar n$ dan juga keadaan eigen dari *H* dengan nilai eigen $En = \hbar^2 n^2/2mR^2$.

Dari solusi untuk operator $x(t)$ yang diberikan dalam persamaan (7) dapat kita gunakan untuk menulis C_1 dalam bentuk

$$C_1(t) = \frac{R^2}{2}\frac{F(t)}{F(0)}, \qquad (14)$$

di mana $F(t) = e^{\frac{it}{2\tau_b}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau_a}{2\tau_b}n^2} cos\left(\frac{nt}{\tau_b}\right)$ dan kostanta waktu untuk $\tau_a = \hbar\beta$ dan $\tau_b = \frac{mR^2}{\hbar}$.

Kita dapat menunjukkan bahwa $F(t)$ juga dapat ditulis dalam bentuk $F(t) = e^{-\frac{\tau_a}{8\tau_b}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau_a}{2\tau_b}(n+1/2)^2} cos\left[(n+1/2)\left(\frac{t-i\tau_a/2}{\tau_b}\right)\right]$, sehingga fungsi korelasi C_2 diberikan oleh $C_2(t) = \langle x(t)\, x(0)\rangle = e^{\frac{it}{\tau_b}} C_1(t)$, dengan menggunakan ekspresi ini mudah untuk mengetahui bahwa $C_2(t) = C_1(-t) = C_1(t + i\tau_a)$.Fungsi korelasi$C_1danC_2$ sangat periodik dengan periode $\tau = 4\pi\tau_b$ dan juga terkait fungsi dengan periode imajiner.Untuk menggambarkan ini, dipertimbangkan:

$g(z) = e^{\frac{z^2}{2\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}n^2} cos\, nz$, ini mirip dengan fungsi Jacobi theta. Di mana $\cos(nz) = \frac{e^{nz}+e^{-inz}}{2}$, maka:$g(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{-\frac{\alpha}{2}\left(n-\frac{iz}{\alpha}\right)^2} + e^{-\frac{\alpha}{2}\left(n+\frac{iz}{\alpha}\right)^2}\right]$, sehingga jelas bahwa $g(z + im\alpha) = g(z)$.

Karena indeks penjumlahan dapat digeser oleh bilangan bulat tanpa mengubah nilai tunggal,maka$g(z)$ periodik dengan periode imajiner iα dan $F(t)$ berhubungan dengan $g(z)$, maka

$F(t) = e^{\frac{iz}{2}} e^{-\frac{z^2}{2\alpha}} g(z)$, di mana, $z = \frac{t}{\tau_b}$ dan $\alpha = \frac{\tau_a}{\tau_b}$. Kemudian kita bangun reprasentasi alternatif untuk $F(z)$, yaitu rumus penjumlahan Poisson digunakan untuk menentukan hasil $\sum_{n=a}^{a} e^{-\frac{\alpha}{2}n^2} \cos nz = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \sum_{n=a}^{a} e^{-\frac{1}{2\alpha}(2n\pi+z)^2}$, kita misalkan suatu fungsi $f(z)$ dengan:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}n^2} \cos nz \; dn. \qquad (15)$$

Dari persamaan (15) kita gunakan integral Gaussian dengan cara Feynman menghasilkan $f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} n e^{-\frac{\alpha}{2}n^2} \sin(nz) \; dn$. Kita selesaikan dengan menggunakan integral parsial dengan memisalkan $\int u dv = u.v - \int v du$diperoleh$f'(z) = -\frac{z}{\alpha} f(\alpha)$ Dengan $f'(z) = \frac{df}{dz}$, maka: $\frac{df}{dz} = -\frac{z}{\alpha} f \rightarrow \frac{df}{f} = -\frac{z}{\alpha} dz$. Integralkan kedua ruas untuk menghasilkan $e^{\frac{\ln f}{\ln C_1}} = e^{-\frac{z^2}{2\alpha}}$. Maka kita dapatkan nilai $f(z)$nya adalah $f(z) = C\, e^{-\frac{z^2}{2\alpha}}$, ketika kita masukkan nilai yang didapat ke dalam persamaan (15) di mana $z = 0$ dapat kita peroleh $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}n^2} \; dn = C$. Dapat kita selesaikan menggunakan integral parsial Gaussian diperoleh hasil $I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda r^2}$. Kita misalkan bahwa $d\theta = \frac{y}{r}$, $d\alpha = r\,dr\,d\theta$, dan $y = r d\theta$, maka didapatkan$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\lambda r^2} \; r\,dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\lambda r^2} \, dr$. Kemudian kita substitusikan dengan pemisalan $u = r^2$, $\frac{du}{dr} = 2r$, maka di peroleh $I^2 = \frac{\pi}{\lambda}(0+1) = \frac{\pi}{\lambda}$. Jadi nilai I yang dihasilkan, yaitu: $I = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$. Dan jika $\lambda = \frac{\alpha}{2}$, di dapatkan: $C = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}$, maka $f(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{-\frac{z^2}{2\alpha}}$, sehingga$z = 2n\pi + z$. Kita mendapat hasil:

$$f(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} e^{-\frac{1}{2\alpha}(2n\pi+z)^2}. \qquad (16)$$

Dengan menggunakan persamaan (16), $f(z)$ juga dapat di tuliskan sebagai $F(z) = e^{\frac{iz}{2}} e^{-\frac{1}{2\alpha}z^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2}{\alpha}n^2\pi^2} \; e^{-\frac{2}{\alpha}\; n\pi z}$. Pada saat mengembalikan skala waktu yang sesuai, fungsi korelasi kemudian dapat ditulis dalam salah satu bentuk yang setara yaitu;

$$C_1(t) = C_1(0) e^{\frac{it}{2\tau_b}} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau_a}{2\tau_b}n^2} cos\frac{nt}{\tau_b}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau_a}{2\tau_b}n^2}} (17)$$

$$C_1(t) = C_1(0) e^{\frac{it}{2\tau_b}} e^{-\frac{t^2}{2\tau_a\tau_b}} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\tau_b}{\tau_\alpha}n^2\pi^2} \; e^{-\frac{2t}{\tau_\alpha}\; n\pi}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\tau_b}{\tau_\alpha}n^2\pi^2}} (18)$$

Ini merupakan kesetaraan yang luar biasa. Pada ekspresi pertama karakter periodik C_1 tampak jelas, sedangkan pada bentuk kedua C_1 tampak menunjukkan peluruhan Gaussian. Penjelasan untuk ciri khas ini dapat ditemukan dengan mencatat bahwa karena jumlah atas *n* berjalan dari $-\infty$ke ∞, ini memiliki suku yang menurun secara eksponensial dan berkembang secara eksponensial. Jika kita perhatikan limit $\hbar \rightarrow 0$ maka, kita dapatkan $\tau_\alpha = \hbar\beta \rightarrow 0$ dan $\tau_b = \frac{mR^2}{\hbar} \rightarrow 0$, akan tetapi $\tau_\alpha \tau_b = mR^2\beta$.

Oleh karena itu, pada limit yang $\hbar \rightarrow 0$, satu-satunya suku yang tidak hilang pada persamaan (18) adalah suku dengan $\mathrm{n} = 0$ dan kita dapat simpulkan bahwa

$$\lim_{\hbar\rightarrow 0} C_1(t) = C_1(0) e^{-\frac{t^2}{2\beta m R^2}} \; , \qquad (19)$$

$$\lim_{\hbar\rightarrow 0} C_2(t) = C_1(0) e^{-\frac{t^2}{2\beta m R^2}} \; .(20)$$

Jadi dalam limit klasik fungsi korelasi C_1 dan C_2 adalah identik dan menunjukkan peluruhan Gaussian. Sedangkan jika pada saat $t = 0$, maka nilai $\lim_{\hbar\rightarrow 0} C_1(t) = C_1$. Ini mennjukkan bahwa persamaan diatas hanya bergantung pada nilai fungsi β, R dan t.

Setidaknya dalam model ini, periodisitas yang ketat dari ekspresi kuantum untuk fungsi korelasi dan peluruhan yang tampaknya ireversibel yang ditunjukkan oleh ekspresi klasik direkonsiliasi sepenuhnya dalam limit $\hbar \rightarrow 0$.

Analisis Mekanika Statistika Klasik

Dengan melihat sistem yang sama pada suatu partikel identik tidak berinteraksi bergerak pada suatu orbit melingkar, dengan energi rata-ratanya ditentukan $t = 0$, maka Hamiltoniannya sama dengan persamaan (1) sampai (4). Dengan matriks kerapatan diberikan oleh persamaan (9), maka $Z = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta H}\, dl$. Maka diperoleh persamaan Hamiltoniannya yang mengarahkan pada solusi $l = konstan\ dan\ \phi\ (t) = \phi + \frac{lt}{mR^2}$, sehingga:

$$x(t) = R\cos\phi(t) = R\cos\left(\phi + \frac{lt}{mR^2}\right). \quad (21)$$

Maka fungsi korelasi yang di dapatkan adalah $C_1(t) = \frac{\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(0)\, x(t) e^{-\frac{\beta l^2}{2mR^2}} d\phi\, dl}{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta l^2}{2mR^2}}\, dl}$, yang kemudian dapat kita tuliskan kedalam bentuk lain menjadi:

$$C_1(t) = \frac{R^2 \int_2^{2\pi} \cos^2\phi d\phi \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{\beta l^2}{2mR^2}} \cos\left(\frac{ilt}{mR^2}\right) dl}{2\pi \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\frac{\beta l^2}{2mR^2}} dl}. \quad (22)$$

Selanjunya kita akan mencari hasil dari masing-masing bagian yaitu, yang pertama mencari hasil dari $\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{\beta l^2}{2mR^2}} \cos\left(\frac{ilt}{mR^2}\right)\, dl = f(\alpha)$. Dengan memisalkan

$$\alpha = \frac{lt}{2mR^2} \text{ dan } \lambda = \frac{\beta}{2mR^2}. \quad (23)$$

Diperoleh $f(\alpha)' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\alpha} e^{-\lambda l^2} \cos(l\alpha)\, dl$ dan $f(\alpha)' = -\int_{-\infty}^{\infty} l\ e^{-\lambda l^2} \sin(l\alpha)\, dl$.

Kita dapat menyelesaikan dengan mengintegral parsialkan, yaitu ketika kita memisalkan $\int udv = u.v - \int vdu$. Maka nilai $f(\alpha)'$ yang di dapat adalah $f(\alpha)' = -\frac{\alpha}{2\lambda} f(\alpha)$ dengan $\frac{d}{d\alpha} f(\alpha) = -\frac{\alpha}{2\lambda} f$, dapat kita integralkan kedua ruas dan menghasilkan $e^{\ln\frac{f}{C}} = e^{-\frac{\alpha^2}{4\lambda}}$, dengan $\frac{f}{C} = e^{-\frac{\alpha^2}{4\lambda}} \rightarrow f(\alpha) = Ce^{-\frac{\alpha^2}{4\lambda}}$, maka: $f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda l^2}\, dl$. Kemudian kita gunakan persamaan (2) dan hasil dari itu kita integralkan mendapatkan:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\beta l^2}{2mR^2}}\, dl = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\beta}{2mR^2}}} = R\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}}. \quad (24)$$

Langkah ke dua kita mencari nilai $R^2 \int_2^{2\pi} \cos^2\phi\, d\phi$. Di mana $\cos^2\phi = \frac{\cos 2\phi + 1}{2}$ kita dapat mengintegralkan dengan mengambil batas $0 \rightarrow 2\pi$dan menghasilkan πR^2. Jika kita masukkan nilai yang didapat dari langkah 1 dan 2 maka:

$$C_1(t) = \frac{R\,.\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}\, e^{-\frac{t^2}{2\beta mR^2}}.\pi R^2}{2\pi.R\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}}$$

$$= \frac{1}{2} R^2 e^{-\frac{t^2}{2\beta mR^2}}$$

Dapat kita simpulkan bahwa hasil yang diperoleh pada persamaan ini sesuai dengan persamaan yang diturukan sebelumnya jika pada persamaan (22) $t = 0$. Maka karakter periodik dari C_1 tampak jelas dan menunjukkan peluruhan Gaussian.

Terlihat dari rangkaian analisis didapatkan jika matriks kerapatan awal memiliki bentuk kanonik serta solusi operator untuk $x(t)$ yang diberikan menghasilkan fungsi korelasi $x(0)$ dengan $x(t)$ pada saat energi awal ditentukan, maka fungsi korelasi posisi untuk sistem partikel yang bergerak pada lingkaran, yang memiliki energi rata-rata tertentu, dapat ditulis dalam bentuk yang menunjukkan sifat transformasinya yaitu:

$$C_1(t) = \langle x(0)\, x(t)\rangle = \frac{Tr\left[x(0)\, x(t)\, e^{-\beta H}\right]}{Tr\left[e^{-\beta H}\right]}.$$

Untuk merepresentasikan $F(z)$, pada awalnya kita menggunakan penjumlahan Poisson kemudian untuk penyelesaiannya kita menggunakan Integral Parsial-Gaussian untuk menentukan hasil $F(z)$, di mana $z = 0$, dengan $\lambda = \frac{\alpha}{2}$ maka nilai $F(z)$nya adalah :

$$F(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\alpha}(2n\pi + z)^2}$$

Pada saat menggunakan mekanika statistika klasik, fungsi korelasi menjadi identik dan menunjukkan peluruhan Gaussian ketika energi rata-

rata pada kondisi $t = 0$, dengan matriks kerapatan yang diberikan $\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}$ yang mengarahkan pada solusi momentum sudutnya konstan dan $\phi(t) = \phi + \frac{lt}{mR^2}$, maka $x(t) = R\cos\phi(t) = R\cos\left(\phi + \frac{lt}{mR^2}\right)$, sehingga ketika kita melakukan evaluasi integral pada persamaan (22) menghasilkan:

$$C_1(t) = \frac{1}{2} R^2 e^{-\frac{t^2}{2\beta m R^2}}$$

KESIMPULAN DAN SARAN

Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa fungsi korelasi posisi untuk sistem partikel yang bergerak pada lingkaran, dan memiliki energi rata-rata tertentu, dapat ditulis dalam bentuk yang menunjukkan sifat transformasinya. Dengan menggunakan rumus jumlah Poisson, ekspresi ditulis ulang untuk Mengaktifkan limit $\hbar \to 0$ yang akan diambil. Akhirnya menunjukkan bahwa dalam limit tersebut fungsi korelasi menjadi identik dengan bentuk yang diberikan oleh mekanika statistik klasik, yang menunjukkan peluruhan gaussian. Pada penelitian ini difokuskan pada perhitungan dengan menggunakan penedekatan mekanika klasik sehingga disarankan untuk pembaca yang ingin mengembangkan bisa mencoba menggunakan pendekatan mekanika kuantum.

DAFTAR PUSTAKA

A. Hobson dan DL Loomis. (1958). *No Title. Phys. Wahy*.

A.A., M. G. (n.d.). *fisika statistik 1*.

Buck, B., & Sukumar, C. V. (2021). *Classical and Quantum Correlation Functions for a Ring Model.*

Cox, H. (2002). Problems and solutions to accompany McQuarrie and Simon Physical chemistry. *Chemistry: A Molecular Approach*.

E. T. Jaynes, Papers on probability, statistics and statistical physics, Synthese Library,

Vol.158 (ed. R. D. Rosenkrantz), Reidel, Dordrecht (1983).

Hadi, M.(2020).*Dasar-Dasar Mekanika Klasik*.68

HL Frisch. (1958). *No Title. Phys. Puta*.

P. M. Morse and H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, Part I, New York: McGraw-Hill, 466-7 (1953).

Pandiangan, P. (n.d.). Tinjauan Ulang Konsep Mekanika Klasik.

Sethna, J. P. (2006). Correlations, response, and dissipation. Statistical Mechanics: Entropy, Order Parameters, and Complexity. Oxford University Press., Chapter 10.

Sianipar, S. R. (2017). Statistik Maxwell-Boltzmann & Interpretasi Statistik tentang Entropi. Retrieved from https://www.slideshare.net/Samantars17/statistik-maxwellboltzmann-interpretasi-statistik-tentang-entropi