# *REVIEW* BEBERAPA PERSAMAAN TAK BERDIMENSI DALAM MEKANIKA KUANTUM NON-RELATIVISTIK

**Wingrit Y.B. Bianome*, Herry F. Lalus, Fakhruddin**
*Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan,*
*Universitas Nusa Cendana, Kupang, 85000, Indonesia*
email: wingritbianome695@gmail.com

## ABSTRAK

*Telah dilakukan review jurnal dengan judul 'Dimensionless equation of non-relativistic quantum mechanics' yang membahas tentang persamaan tak berdimensi dalam mekanika kuantum non-relativistik pada model potensial satu dimensi, model atom hidrogen dan teori perturbasi tak bergantung waktu. Tujuan dari penelitian ini untuk menyajikan persamaan tak berdimensi secara jelas dan terperinci pada model potensial satu dimensi, atom hidrogen serta teori perturbasi tak bergantung waktu dengan menggunakan operator Hamiltonian. Dalam menentukan persamaan tak berdimensi dilakukan terlebih dahulu menurunkan persamaan Hamiltonian tak bergantung waktu. Setelah menentukan persamaan Hamiltonian tak bergantung waktu, ditinjau setiap kasus yang terdapat pada model potensial satu dimensi, model atom hidrogen dan teori perturbasi tak bergantung waktu, kemudian ditransformasikan beberapa solusi dan parameter yang sederhana serta skala yang tepat sehingga menghasilkan persamaan dalam bentuk tak berdimensi. Hasil penelitian menunjukan bahwa dengan menggunakan persamaan Hamiltonian dapat menentukan persamaan tak berdimensi di berbagai kasus yang terdapat pada model potensial satu dimensi, atom hidrogen dan teori perturbasi tak bergantung waktu.*

**Kata kunci:** *Persamaan tak Berdimensi; Mekanika Kuantum; Mekanika Kuantum Non-relativistik; Operator Hamiltonian*

## *ABSTRACT*

***[Titel: Review Of Some Non-Dimensional Equations In Non-Relativistic Quantum Mechanics]*** *A review of the journal entitled 'Dimensionless equation in non-relativistic quantum mechanics' has been conducted which discusses dimensionless equations in non-relativistic quantum mechanics in one-dimensional potential models, hydrogen atomic models and timeless perturbation theory. The purpose of this study is to present dimensionless equations clearly and in detail on one-dimensional potential models, hydrogen atoms and timeless perturbation theory using Hamiltonian operators. In determining the dimensionless equation, it is done first deriving the timeless Hamiltonian equation. After determining the time-independent Hamiltonian equation, each case contained in the one-dimensional potential model, the hydrogen atomic model and the timeless perturbation theory was transformed, then transformed several simple solutions and parameters and precise scales to produce equations in dimensionless form. The results showed that using the Hamiltonian equation can determine dimensionless equations in various cases contained in one-dimensional potential models, hydrogen atoms and timeless perturbation theory.*

**Keywords:** *Dimensionless Equations; Quantum Mechanics; Non-relativistic Quantum Mechanics; Hamiltonian Operators*

## PENDAHULUAN

Mekanika kuantum dikembangkan sebagai respon atas ketidakmampuan teori mekanika klasik dan elektromagnetik dalam menjelaskan beberapa fenomena seperti sifat radiasi elektromagnetika dan struktur atom. Akibatnya, muncul teori yang di mana prinsip dasarnya dapat digunakan untuk menjelaskan, tidak hanya struktur, sifat atom, molekul dan padatan serta bagian-bagian dari inti dan partikel elementer seperti proton dan neutron (Noer & Dayana, 2021). Mekanika kuantum non-relativistik adalah rumusan secara matematis dalam mekanika kuantum yang diterapkan dalam konteks relativitas Galilea serta pada teori ini membahas beberapa persamaan, misalnya persamaan gelombang dan persamaan Schrödinger (Rae, 2002).

Persamaan Schrödinger merupakan dasar dari mekanika kuantum yang digunakan untuk memprediksi sifat-sifat partikel subatomik serta perilaku materi pada skala atomik dan sub atomik. Untuk memudahkan pemahaman terhadap setiap persamaan dalam mekanika kuantum non-relativistik, setiap variabel yang terkandung dalam persamaan tersebut diubah menjadi bentuk tak berdimensi. Apabila menganalisis persamaan Schrӧdinger tak bergantung waktu $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x)=E\psi(x).$ Dari Persamaan ini terdapat beberapa variable satuan fisik seperti posisi $x$, massa partikel $m$ dan konstanta tereduksi $\hbar$. Jika dipilih parameter tak berdimensi dan solusi sederhana serta skala yang tepat, maka dapat disederhanakan bentuk persamaan $-\frac{1}{2}\frac{d^2}{du^2}+(u-\epsilon)=0$ ini dalam bentuk tak berdimensi (Sugiyono, 2016).

Dalam penelitian ini, memanipulasi aljabar dari persamaan tak berdimensi terbukti sangat sulit dibandingkan dengan metode numerik. Jika tidak diselesaikan dengan tepat dan tidak diteliti secara detail, hal ini dapat mengakibatkan kesalahan dalam penyelesaiannya. Peneliti sebelumnya juga telah menunjukan persamaan tak berdimensi dan membahas keuntungan dari pendekatan ini dalam mekanika kuantum non-relativistik. Dapat mengkaji beberapa kasus satu dimensi, seperti osilator harmonik dengan potensial, osilator Morse dengan potensial, serta memberikan contoh persamaan Schrӧdinger dengan potensial. Selain itu, peneliti ini juga mengkaji bagian atom dan molekul, dengan fokus khusus pada operator Hamiltonian untuk atom hidrogen. Penelitian ini menguraikan kegunaan persamaan tak berdimensi dalam penerapan teori gangguan, dengan menggunakan beberapa contoh seperti osilator anharmonik kuartik dan operator Hamiltonian untuk atom dengan elektron dan muatan nuklir dalam pendekatan inti yang terjepit (Fernández, F. M, 2020).

Selanjutnya, penelitian ini digunakan operator Hamiltonian sebagai alat untuk membantu menyelesaikan persamaan dalam mekanika kuantum non-relativistik ke dalam bentuk tak berdimensi. Persamaan yang disajikan dalam bentuk tak berdimensi mempermudah untuk lebih memahami fisika secara fundamental dari fenomena fisika dan mempermudah dalam analisis secara matematis.

Tujuan dari penelitian ini, untuk menentukan persamaan tak berdimensi dalam mekanika kuantum non-relativistik untuk model potensial satu dimensi, model atom hidrogen dan teori pertubasi tak bergantung waktu. Dengan menggunakan operator Hamiltonian, setiap persamaan yang awalnya berdimensi diubah menjadi bentuk tak berdimensi. Kajian ini dilakukan karena terdapat persamaan baru yang memerlukan analisis mendalam untuk memudahkan pembaca dalam memahami jurnal ini dengan baik. Selain itu, penelitian yang dilakukan dalam jurnal ini merupakan penelitian terbaru dengan penurunan persamaan yang kompleks dan sulit dipahami.

## PEMBAHASAN

### I. Analisis Model Potensial Satu Dimensi

Menentukan persamaan Schrӧdinger tak bergantung waktu dalam mekanika kuantum non-relativistik yaitu ditinjau dari persamaan energi total $E=T+V$ maka dihasilkan persamaan $E\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+V(x)$. Persamaan Schrӧdinger adalah persamaan yang mencerminkan operator Hamiltonian dan sebagai operasi matematis untuk menggambarkan energi total sistem kuantum. Dalam konteks mekanika kuantum persamaan Hamiltonian dituliskan berikut

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x). \tag{1}$$

Persamaan (1) digunakan untuk memprediksi perilaku fungsi gelombang sebuah partikel pada keadaan tertentu.

Selanjutnya menentukan solusi sederhana untuk menganalisis persamaan dalam mekanika kuantum non-relativistik pada model satu dimensi, model atom hidrogen dan teori perturbasi. Setiap kasus didefinisikan koordinat $\tilde{x}\equiv x/L$, sehingga jika bentuk $\frac{d}{dx}\equiv\frac{d}{Ld\tilde{x}}$ atau $\frac{d^2}{dx^2}\equiv\frac{d}{L^2d\tilde{x}^2}$ dari bentuk ini yang digunakan untuk tinjau kasus-kasus yang mengandung variabel $x$.

Selanjutnya persamaan (1) ditinjau dengan kedua ruas dikalikan bentuk $\frac{mL^2}{\hbar^2}$ dan juga setiap variabel $x$ diubah sesuai dengan yang telah didefinisikannya, maka dihasilkan persamaan berikut

$$\widetilde{H}\equiv\frac{mL^2}{\hbar^2}H=-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2}+\frac{mL^2}{\hbar^2}\,V(L\tilde{x}). \tag{2}$$

Unit dimensi energi adalah 1 joule$=1\ kg\frac{m^2}{s^2}$, sedangkan kebalikan unit dimensi energi yaitu $\frac{s^2}{kg.m^2}$

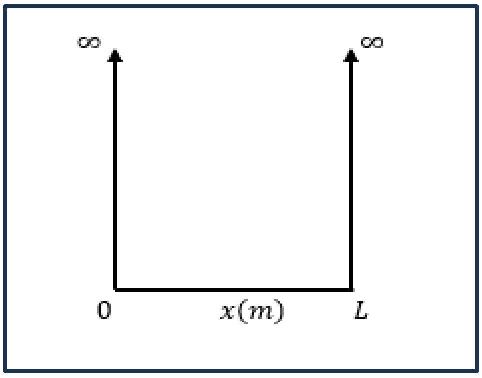
 ISSN: 2502-2016

maka didefinisikan satuan energi tak berdimensi dalam mekanika kuantum yang sesuai, dapat dinyatakan sebagai

$$\tilde{E} \equiv \frac{mL^2}{\hbar^2} E. \tag{3}$$

### i. Kasus Partikel Massa $m$ dalam Kotak Panjang $L$

Selanjutnya menganalisis kasus sederhana, yaitu partikel massa $m$ dalam kotak panjang $L$, seperti yang terlihat pada gambar di bawah ini




**Gambar 1. Partikel massa $m$ dalam kotak panjang $L$**

Berdasarkan gambar 1 jika potensialnya ∞ di luar kotak, maka fungsi gelombangnya harus nol di luar kotak dengan secara matematis dapat ditulis sebagai $\psi(x) = 0$ untuk $x < 0$ dan $x > L$. Jika ditinjau dengan persamaan Hamiltonian yaitu $H\psi(x) = E\psi(x)$ atau ditulis persamaan sebagai $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$,
jika potensial $V(x) = 0$, maka persamaan menjadi

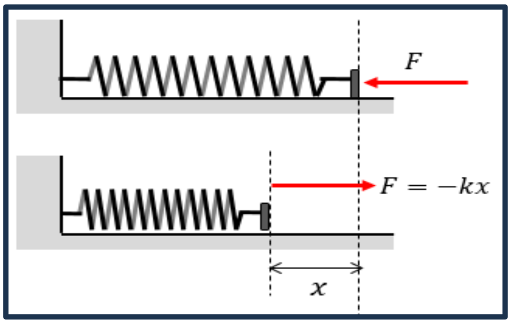
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\psi(x). \tag{4}$$

Persamaan (4) diubah ke dalam bentuk tak berdimensi, dengan kedua ruas dikalikan bentuk $\frac{mL^2}{\hbar^2}$ dan jika $\tilde{x} \equiv x/L$ maka dihasilkan bentuk $-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2}\psi(\tilde{x}L) = \tilde{E}\psi(\tilde{x}L)$. Lalu didefinisikan $\tilde{\psi}(\tilde{x}) \equiv \psi(L\tilde{x})$ maka persamaan menjadi

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2}\tilde{\psi}(\tilde{x}) = \tilde{E}\tilde{\psi}(\tilde{x}). \tag{5}$$

### ii. Kasus Osilator Harmonik Sederhana

Selanjutnya pada model satu dimensi diberikan kasus sederhana untuk menentukan potensialnya ke dalam bentuk tak berdimensi, pertama osilator harmonik dengan potensialnya seperti yang terlihat pada gambar di bawah ini.




**Gambar 2. Potensial pegas**

Gerak osilasi dapat dijelaskan sebagai pergerakan suatu objek yang berulang-ulang melalui jalur yang sama. Contoh kasus sederhana adalah gerak osilasi pada sebuah pegas yang apabila direnggangkan atau ditekan, mengakibatkan benda yang terhubung dengan pegas tersebut bergerak bolak balik. Fenomena ini jika ditinjau secara klasik, dimana menggunakan hukum Hooke $F = -kx \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$. Selanjutnya menggunakan solusi dari $x(t) = A\,sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ dengan frekuensi sudut $\omega^2 = \frac{k}{m}$ lalu disubstitusikan $\omega^2$ maka persamaan menjadi $x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$. Jika $x = x_0$, maka bentuk potensial $V_{(x)} = V_{(x_0)} + \frac{dv}{dt}\Big|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{d^2v}{dx^2}\Big|_{x=x_0}(x - x_0)^2$ dimana $x - x_0$ sehingga pada bagian ini, jika tinjau suku pertama, maka titik minimum $\frac{dv}{dx}\Big|_{x=x_0} = 0 \rightarrow V(x) = V_{x_0}$, untuk $\frac{d^2v}{dx^2} > 0$. Ditinjau lebih lanjut maka dihasilkan persamaan potensial harmonik sederhana yaitu

$$V(x) = \frac{k}{2}x^2. \tag{6}$$

Persamaan (6) ditinjau dengan kedua ruas dikalikan $\frac{mL^2}{\hbar^2}$ dihasilkan persamaan $\frac{mL^2}{\hbar^2}V(x) = \frac{mL^2}{\hbar^2}\frac{k}{2}x^2$ dan jika $\tilde{x} \equiv x/L$, maka diperoleh persamaan berikut

$$\frac{mL^2}{\hbar^2}V(L\tilde{x}) = \frac{mL^4k}{\hbar^2}\frac{\tilde{x}^2}{2}. \tag{7}$$

Persamaan (7) dalam bentuk berdimensi, untuk menghilangkan variabel berdimensi dilakukan pemilihan satuan panjang $L$ dari bentuk $\frac{mL^4k}{\hbar^2} = 1$ lalu kedua ruas dikalikan $\frac{\hbar^2}{mk}$ menjadi $\frac{mL^4k}{\hbar^2}\frac{\hbar^2}{mk} = 1\frac{\hbar^2}{mk}$ selanjutnya menghilangkan variabel yang sama, maka diperoleh bentuk persamaan berikut

$$L^4 = \frac{\hbar^2}{mk}. \tag{8}$$

Selanjutnya menentukan persamaan tak berdimensi pada persamaan (6) yaitu ditinjau dengan persamaan Hamiltonian $H = T + V$, jika diketahui $T = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ dan $V(x) = \frac{k}{2}x^2$ maka persamaan Hamiltonian menjadi $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{k}{2}x^2$. Selanjutnya kedua ruas dikalikan dengan $\frac{mL^2}{\hbar^2}$ jika koordinat tak berdimensi $\tilde{x} \equiv x/L$, sehingga dihasilkan persamaan $\widetilde{H} \equiv \frac{mL^2}{\hbar^2}H = \frac{mL^2}{\hbar^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d(\tilde{x}^2L^2)} + \frac{mL^2}{\hbar^2}\frac{k}{2}(\tilde{x}^2L^2)$ lalu dieliminasi variabel yang sama dan disubstitusikan persamaan (8), maka dihasilkan persamaan berikut

$$\widetilde{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \frac{1}{2}\tilde{x}^2. \tag{9}$$

### iii. Kasus Fungsi Energi Potensial

Diberikan fungsi energi potensial dalam parameter panjang yaitu,

$$V(x) = V_0 f\left(\frac{x}{a}\right). \tag{10}$$

Dengan potensial yang diberikan pada persamaan (10) ditinjau lebih lanjut dengan kedua ruas dikalikan bentuk $\frac{mL^2}{\hbar^2}$, maka dihasilkan persamaan $\frac{mL^2}{\hbar^2}V(x) = \frac{mL^2}{\hbar^2}V_0 f\left(\frac{x}{a}\right)$. Kemudian variabel $x$ diubah dengan bentuk $\tilde{x} \equiv x/L$, sehingga diperoleh persamaan berikut

$$\frac{mL^2}{\hbar^2}V(L\tilde{x}) = \frac{mL^2}{\hbar^2}V_0 f\left(\frac{L\tilde{x}}{a}\right). \tag{11}$$

Persamaan (11) masih dalam bentuk berdimensi, untuk menghilangkan variabel berdimensi yaitu ditinjau ulang dari persamaan (10), disubstitusikan ke dalam persamaan Hamiltonian $H = T + V$ atau $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0 f\left(\frac{x}{a}\right)$. Selanjutnya kedua ruas dikalikan dengan bentuk $\frac{mL^2}{\hbar^2}$ jika $L \equiv a$ dan $\tilde{x} \equiv x/L$ maka persamaan menjadi $\widetilde{H} \equiv \frac{mL^2}{\hbar^2}H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{mL^2}{\hbar^2}\frac{d^2}{d(L^2\tilde{x}^2)} + \frac{mL^2}{\hbar^2}V_0 f\left(\frac{L\tilde{x}}{a}\right)$. Setelah itu dieliminasi variabel yang sama sehingga persamaan menjadi $\widetilde{H} \equiv \frac{mL^2}{\hbar^2}H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \frac{ma^2}{\hbar^2}V_0 f(\tilde{x})$. Pada bagian sisi kanan suku kedua masih dalam bentuk berdimensi sehingga dapat memilih parameter tak berdimensi $\lambda$ yang mewakili bentuk $\frac{ma^2}{\hbar^2}V_0$, maka dihasilkan persamaan tak berdimensi yang dituliskan sebagai

$$\widetilde{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \lambda f(\tilde{x}). \tag{12}$$

Selanjutnya memilih satuan panjang $L$ dari bentuk $\lambda = \frac{ma^2}{\hbar^2}V_0$ jika $L \equiv a \to \lambda = \frac{mL^2}{\hbar^2}V_0$, bentuk ini $\frac{mL^2}{\hbar^2}V_0 = 1$, kedua ruas dikalikan dengan $\frac{\hbar^2}{mV_0}$, persamaan menjadi $\frac{mL^2V_0}{\hbar^2}\frac{\hbar^2}{mV_0} = 1\frac{\hbar^2}{mV_0}$, maka dihasilkan bentuk pemilihan satuan panjang $L$ sebagai

$$L^2 = \frac{\hbar^2}{mV_0} \tag{13}$$

Persamaan (12) masih bergantung pada $\lambda$, agar tidak terikat pada parameter $\lambda$. Ditinjau ulang dengan potensialnya yang terdapat di persamaan (10) disubstitusikan ke dalam persamaan Hamiltonian, maka persamaan menjadi $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0 f\left(\frac{x}{a}\right)$ lalu kedua ruas dikalikan dengan $\frac{ma^2}{\hbar^2}$ jika $L \equiv a$, didapatkan persamaan $\widetilde{H} = \frac{ma^2}{\hbar^2}H = \frac{ma^2}{\hbar^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2L^2} + V_0 f\left(\frac{L\tilde{x}}{a}\right)\frac{ma^2}{\hbar^2}$.
Selanjutnya dieliminasi variabel yang sama kemudian

disubstitusikan satuan panjang $L^2$, maka diperoleh persamaan tak berdimensi yang tak bergantung pada $\lambda$, yaitu

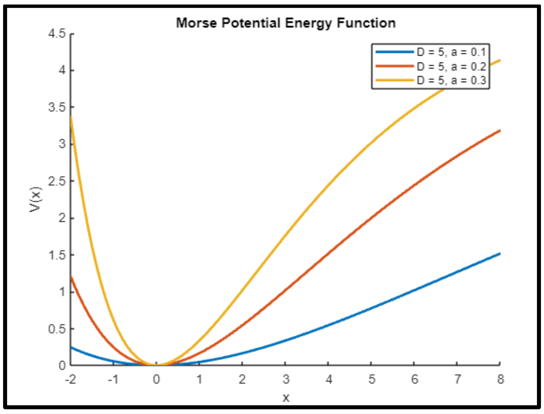
$$\widetilde{H} = \frac{1}{V_0}, H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + f(\tilde{x}). \tag{14}$$

### iv. Kasus Potensial Morse

Selain dari kasus sederhana pada potensial penghalang yang diberikan, terdapat kasus sederhana lainnya, yaitu osilator Morse. Osilator Morse menjelaskan getaran atom dalam molekul sebagai getaran anharmonik dan menggambarkan energi potensial getaran yang dianggap lebih kompleks daripada model osilator harmonik. Persamaan Morse memiliki persamaan matematika yaitu

$$V(x) = De[1 - \exp(-ax)]^2. \tag{15}$$

jika divisualisasikan gambar osilator Morse dengan menggunakan persamaannya, dimana pemilihan variabel $D = 5, a_1 = 0.1, a_2 = 0.2$ dan $a_3 = 0.3$ maka dihasilkan bentuk gambar seperti di bawah ini




**Gambar 3. Osilator Morse**

Selanjutnya, persamaan (15) jika disubstitusikan ke dalam persamaan Hamiltonian $H = T + V$, maka persamaan menjadi $H = -\frac{\hbar^2}{2m} + \frac{d^2}{dx^2} + D_e[1 - exp(-ax)]^2$. Selanjutnya disederhanakan ke dalam bentuk tak berdimensi, yaitu kedua ruas dikalikan $\frac{m}{\hbar^2 a^2}$, jika $L \equiv \frac{1}{a}$, maka didapatkan persamaan $\widetilde{H} \equiv \frac{m}{\hbar^2 a^2} H = \frac{m}{\hbar^2 a^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2 L^2} + \frac{mDe}{\hbar^2 a^2}\left[1 - exp\left(-a(\tilde{x}L)\right)\right]^2$

menghilangkan variabel yang sama, maka diperoleh persamaan tak berdimensi berikut

$$\widetilde{H} = -\frac{1}{2} + \frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \lambda[1 - exp(-\tilde{x})]^2 \tag{16}$$

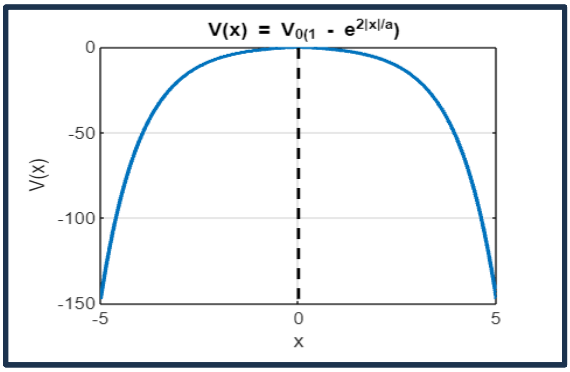
Persamaan (16) dalam bentuk tak berdimensi, variabel $\lambda$ dipilih sebagai parameter tak berdimensi yang mewakili bentuk dari $\frac{mDe}{\hbar^2 a^2}$.

### v. Kasus Potensial Penghalang Eksponensial Mutlak

Terdapat kasus yang lain di model potensial satu dimensi yaitu potensial penghalang eksponensial mutlak dengan persamaan matematikanya yaitu

$$V(x) = V_0\left(1 - e^{(2|x|/a)}\right), \tag{17}$$
$$V_0 > a, a > 0.$$

Untuk menampilkan bentuk gambar potensial penghalang eksponensial mutlak dengan menggunakan persamaannya, yaitu pemilihan nilai dari variabel $V_0 = 1$ dan $a = -2$, maka dihasilkan gambar di bawah ini

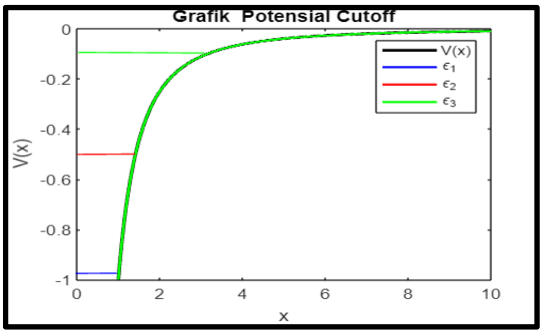



**Gambar 4 Potensial penghalang eksponensial mutlak**

Selanjutnya, tinjau persamaan (17) untuk menentukan persamaan tak berdimensinya dengan menggunakan persamaan Hamiltonian $H = T + V$, $T = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ dan $V(x) = V_0(1 - e^{(2|x|/a)}$ jika dimisalkan $f(\tilde{x}) = \left(1 - e^{(2|x|a)}\right)$, maka persamaan menjadi $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_0 f(\tilde{x})$. Selanjutnya, kedua ruas dikalikan dengan $\frac{mL^2}{\hbar^2}$ persamaan menjadi $\widetilde{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{mL^2}{\hbar^2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{mL^2}{\hbar^2}V_0 f(\tilde{x})$, jika $\tilde{x} \equiv x/L$ maka dihasilkan persamaan yang tak berdimensi $\widetilde{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}} + \lambda f(\tilde{x})$.

### *vi.* Kasus Potensial *Cut off*

Selanjutnya pada kasus potensial *Cut off* dengan bentuk potensialnya $V(x) = -\frac{\alpha}{\alpha x^2}, \epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$. Jika divisualisasikan ke dalam bentuk gambar dengan menggunakan persamaan potensialnya dengan nilai dari $\alpha = 1$, sedangkan $\epsilon_1 = 0.1$ $\epsilon_2 = 0.5$ dan $\epsilon_3 = 1$ maka dihasilkan gambar di bawah ini




**Gambar 5. Potensial *cut off***

Dalam kasus ini terdapat dua bentuk lain model potensial satu dimensi, yaitu bentuk potensial pertama $V\epsilon(x) = -\frac{\alpha}{\epsilon^2}$ dengan syarat batas $0 < x < \epsilon$. Untuk menentukan persamaan tak berdimensinya, kedua ruas dikalikan dengan $\frac{2mL^2}{\hbar^2}$ didapatkan bentuk $\frac{2mL^2}{\hbar^2} V_\epsilon(x) = -\frac{\alpha}{\epsilon^2}\frac{2mL^2}{\hbar^2}$, didefinisikan satuan panjang $L^2 = \frac{\hbar^2\epsilon^2}{2m\alpha}$, maka diperoleh persamaan berikut

$$\frac{\epsilon^2}{\alpha^2} V\epsilon(L\tilde{x}) = -1. \tag{18}$$

Kemudian potensial kedua $V\epsilon(x) = -\frac{\alpha}{x^2}$ dengan syarat batas $\epsilon < x > \infty$. Disederhanakan menjadi bentuk yang lain, yaitu dengan proses penyelesaian sama seperti pada persamaan (18), sehingga dihasilkan persamaan $\frac{\epsilon^2}{\alpha^2} V\epsilon(L\tilde{x}) = -\frac{\epsilon^2}{\tilde{x}^2}$, karena $\epsilon \equiv \rho_0$, maka bentuk persamaan menjadi

$$\frac{\epsilon^2}{\alpha^2} V\epsilon(L\tilde{x}) = -\frac{\rho_0^2}{\tilde{x}^2}, \tag{19}$$

Dengan demikian persamaan (18) dan (19) dihasilkan dalam bentuk tak berdimensi tanpa melibatkan persamaan Hamiltonian.

Selanjutnya menentukan persamaan tak berdimensi pada potensial *Cut off* dengan menggunakan persamaan Hamiltonian. Bentuk potensial pertama $V(x) = -\frac{\alpha}{\epsilon^2}$ disubstitusikan ke dalam persamaan Hamiltonian maka persamaan menjadi $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\alpha}{\epsilon^2}$. Jika persamaan diubah ke bentuk tak berdimensi, dengan kedua ruas dikalikan bentuk $\frac{2mL^2}{\hbar^2}$, untuk $\tilde{x} \equiv x/L$ diperoleh persamaan $\tilde{H} = \frac{2mL^2}{\hbar^2} H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{2mL^2}{\hbar^2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2 L^2} - \frac{\alpha}{\epsilon^2}\frac{2mL^2}{\hbar^2}$, kemudian disubstitusikan pemilihan satuan panjang $L^2 = \frac{\hbar^2\epsilon^2}{2m\alpha}$ maka dihasilkan persamaan tak berdimensi $\tilde{H} = \frac{\epsilon^2}{\alpha} H = -\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} - 1$. Selanjutnya ditinjau bentuk potensial kedua $V(x) = -\frac{\alpha}{x^2}$ disubstitusikan ke dalam persamaan Hamiltonian menjadi $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} - \frac{\alpha}{x^2}$ kedua ruas dikalikan dengan bentuk $\frac{2mL^2}{\hbar^2}$, untuk koordinat $\tilde{x} \equiv x/L$ maka diperoleh persamaan $\tilde{H} = \frac{2mL^2}{\hbar^2} H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{2mL^2}{\hbar^2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2 L^2} - \frac{\alpha}{\tilde{x}^2 L^2}\frac{2mL^2}{\hbar^2}$. Kemudian disubstitusikan bentuk $L^2 = \frac{\hbar^2\epsilon^2}{2m\alpha}$ dan didefinisikan bentuk $\rho_0^2 = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}$ sehingga dihasilkan persamaan tak berdimensi $\tilde{H} = \frac{\epsilon^2}{\alpha} = -\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} - \frac{\rho_0^2}{\tilde{x}^2}$.

### vii. Contoh Penerapan Persamaan tak Berdimensi pada Kasus Potensial Penghalang

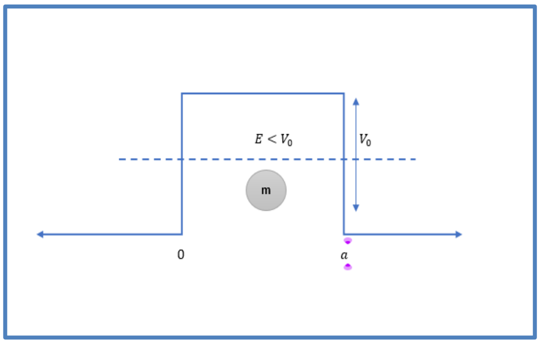
Dalam model potensial satu dimensi pada kasus potensial penghalang ini, penerapan konsep tak berdimensi bertujuan untuk memberikan wawasan abstrak dan umum terhadap sifat transmisi partikel melalui potensial penghalang tersebut. Kasus ini dapat ditinjau melalui pemecahan persamaan Schrӧdinger dengan solusi persamaan potensial berikut

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 < x > a \,. \\ 0 & x > a \end{cases}$$

Berdasarkan bentuk solusi dari potensial diatas, selanjutnya menentukan koefisien transmisi $T$ pada tiga kasus $E < V_0$, $E > V_0$ dan $E = V_0$.

 ISSN: 2502-2016

**Kasus $E < V_0$**




**Gambar 6. Kasus $E < V_0$**

Selanjutnya tinjau daerah I dan III untuk menentukan koefisien transmisi dengan menggunakan persamaan Schrӧdinger $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi$ jika $V_0 = 0$ maka persamaan Schrӧdinger menjadi $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}V_0\psi = E\psi$ lalu dihasilkan bentuk $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ dan fungsi gelombang $\psi_1 = Ae^{ikx} + B_e^{-ikx}$ dan $\psi_3 = Ee^{ikx}$ . Sedangkan untuk daerah II dihasilkan bentuk $l = \sqrt{\frac{2m(1-E)}{\hbar^2}}$ dan $\psi_2 = Ce^{lx} + De^{-lx}$. Selanjutnya tinjau syarat kontinuitas di $\psi_1(x) = \psi_2(x)$, jika $x = -a$ maka dihasilkan persamaan berikut

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = Ce^{-la} + De^{la}\,. \tag{20.a}$$

Lalu turunkan $\left.\frac{d\psi_1}{dx}\right|_{x=-a}$ dan $\left.\frac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=-a}$, maka

$$ik\left(Ae^{-ika} - Be^{ika}\right) = l\left(Ce^{-la} - De^{la}\right) \tag{20.b}$$

untuk kontinuitas $\psi_2(x) = \psi_3(x)$ jika $x = a$ maka dihasilkan persamaan berikut

$$Ce^{la} + De^{-la} = Ee^{ika}. \tag{20.c}$$

Lalu turunkan $\left.\frac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=a}$ dan $\left.\frac{d\psi_3}{dx}\right|_{x=a}$, maka persamaan menjadi

$$l(Ce^{la} - De^{-la}) = ikEe^{ika}. \tag{20.d}$$

Persamaan (20.c) dikalikan dengan $l$, menjadi

$$lCe^{la} + lDe^{-la} = lEe^{ika} \tag{20.e}$$

persamaan (20.e) kurang persamaan (20.d), menjadi

$$C = \frac{e^{la}}{2}\left(1 - \frac{ik}{l}\right)Ee^{ika}. \tag{20.f}$$

Persamaan (20.e) dijumlahkan dengan persamaan (20.d), menjadi

$$C = \frac{e^{la}}{2}\left(1 + \frac{ik}{l}\right)Ee^{ika}. \tag{20.g}$$

Kemudian persamaan (20.a) kedua ruas dikalikan dengan $ik$, menjadi

$$ik\,Ae^{-ika} + ik\,Be^{ika} = ik\,Ce^{-la} + ik\,De^{la}. \tag{20.h}$$

Persamaan (20.h) dijumlahkan dengan persamaan (20.b) dan substitusikan persamaan (20.g) dan persamaan (20.f) menjadi

$$Ae^{-2ika} = E2ik\left(\frac{e^{2la}+e^{-2la}}{2}\right) + E\left(\frac{k}{l} - \frac{l}{k}\right)\left(\frac{e^{2la}-e^{-2la}}{2}\right)$$

lalu disederhanakan bentuk $\frac{(Ce^{2la}+e^{-2la})}{2} = \cosh(2la)$ dan $\left(\frac{e^{2la}-e^{-2la}}{2}\right) = \sinh(2la)$, sehingga persamaan menjadi

$$\frac{E}{A} = \frac{e^{2ika}}{\cosh(2la) - \frac{i}{2}\left(\frac{k^2-l^2}{lk}\right)\sinh(2la)}$$

$$T = \frac{J_{terus}}{J_{datang}} = T = \left|\frac{E}{A}\right|^2,$$

$$T = \left(\frac{e^{2ika}}{\left(\cosh(2la) + \frac{i}{2}\left(\frac{k^2-l^2}{lk}\right)\sinh(2la)\right)}\right)^*$$

$$\left(\frac{e^{2ika}}{\left(\cosh(2la) + \frac{i}{2}\left(\frac{k^2-l^2}{lk}\right)\sinh(2la)\right)}\right)$$

$$T = \frac{1}{\cosh^2(2la) + \frac{\left(k^2-l^2\right)^2}{4l^2k^2}\sinh^2(2la)}.$$

Di misalkan $\cosh^2(la) - \sinh^2 la = 1$, sehingga bentuk persamaan menjadi

$$T = \frac{1}{1 + \frac{(k^2+l^2)^2}{4l^2k^2}\sin^2 h\,(2la)}.$$

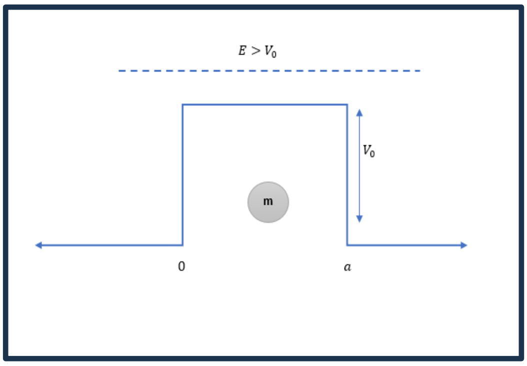
Kemudian disubstitusikan nilai dari $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $l = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$, maka diperoleh persamaan berikut

$$T = \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\sinh^2\left(\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}\right)}.$$

Selanjutnya, persamaan disederhanakan ke dalam bentuk tak berdimensi dengan dimisalkan $\lambda$ sebagai parameter tak berdimensi yang mewakili bentuk $\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0-E)}$ sehingga bentuk persamaan menjadi $T = \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\sinh^2\lambda}$, dan didefinisikan parameter baru $\epsilon \equiv \frac{V_0}{E}$, maka persamaan menjadi

$$T = \frac{1}{1+\frac{\epsilon}{4(1-\epsilon)}\sinh^2\lambda}. \qquad (21)$$

**Kasus $E > V_0$**




**Gambar 7. Kasus $E > V_0$**

Selanjutnya tinjau daerah I dan III untuk menentukan koefisien transmisi $T$ dengan menggunakan persamaan Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi$, jika $V_0 = 0$, maka persamaan Schrödinger menjadi $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$ lalu dihasilkan bentuk $\kappa = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ dan fungsi gelombang $\psi_1 = Ae^{i\kappa x} + Be^{-i\kappa x}$, $\psi_3 = Ee^{i\kappa x}$. Kemudian daerah II ditinjau juga dengan persamaan Schrödinger, jika $V_0 = V_0$ maka persamaan menjadi $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi$ lalu dihasilkan bentuk $w = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$ dan fungsi gelombang $\psi_2 = Ce^{iwx} + De^{-iwx}$. Selanjutnya menentukan syarat kontinuitas $x = -a$, untuk $\psi_1(x=-a) = \psi_2(x=-a)$ dihasilkan persamaan berikut

$$Ae^{-i\kappa a} + Be^{i\kappa a} = Ce^{-iwa} + De^{iwa}. \qquad (22.a)$$

Lalu turunkan $\left.\frac{d\psi_1}{dx}\right|_{x=-a}$ dan $\left.\frac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=-a}$, maka

$$i\kappa\left(Ae^{-i\kappa a} - Be^{i\kappa a}\right) = iw\left(Ce^{-i\kappa a} - De^{i\kappa a}\right). \qquad (22.b)$$

Sedangkan untuk kontinuitas $x = a$, untuk $\psi_2(x=a) = \psi_3(x=a)$ dihasilkan persamaan berikut

$$Ce^{iwa} + De^{-iwa} = Ee^{i\kappa a}, \qquad (22.c)$$

Lalu turunkan $\left.\frac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=a}$ dan $\left.\frac{d\psi_3}{dx}\right|_{x=a}$, maka

$$iw\left(Ce^{iwa} - De^{-iwa}\right) = i\kappa Ee^{i\kappa a}. \qquad (22.d)$$

Selanjutnya persamaan (22.c) dikalikan dengan $iw$, menjadi

$$iw\,Ce^{iwa} + iwDe^{-iwa} = iwE^{i\kappa a}. \qquad (22.e)$$

Persamaan (22.e) kurang persamaan (22.d), menjadi

$$D = \frac{e^{-iwa}}{2}\left(1 - \frac{i\kappa}{iw}\right)Ee^{i\kappa a}. \qquad (22.f)$$

Persamaan (22.e) dijumlahkan dengan persamaan (22.d), menjadi

$$C = \frac{e^{iwa}}{2}\left(1 - \frac{i\kappa}{iw}\right)Ee^{i\kappa a}. \qquad (22.g)$$

Persamaan (22.a) dikalikan dengan $i\kappa$, menjadi

$$i\kappa\,Ae^{i\kappa a} + i\kappa\,Be^{-i\kappa a} = i\kappa\,Ce^{iwa} + i\kappa\,De^{-iwa}. \qquad (22.h)$$

Persamaan (22.h) dijumlahkan dengan persamaan (22.b) selanjutnya disubstitusikan persamaan (22.f) dan (22.g), maka dihasilkan persamaan berikut

$$\frac{E}{A} = \frac{e^{2i\kappa a}}{\cosh(2iwa) + \frac{i}{2}\left(\frac{\kappa^4 - w^2}{iw\kappa^2}\right)\sinh(2iwa)}.$$

Sehingga untuk mendapatkan koefisien Transmisi, maka

$$T = \frac{J_{terus}}{J_{datang}} = \left|\frac{E}{A}\right|^2 = \left|\frac{E}{A}\right|^* \left|\frac{E}{A}\right|,$$

$$T = \left(\frac{e^{2i\kappa a}}{\cosh(2iwa)+\frac{i}{2}\left(\frac{\kappa^4-w^2}{iw\kappa^2}\right)\sinh(2iwa)}\right)^* \left(\frac{e^{2i\kappa a}}{\cosh(iwa)+\frac{i}{2}\left(\frac{\kappa^4-w^2}{iw\kappa^2}\right)\sinh(2iwa)}\right),$$

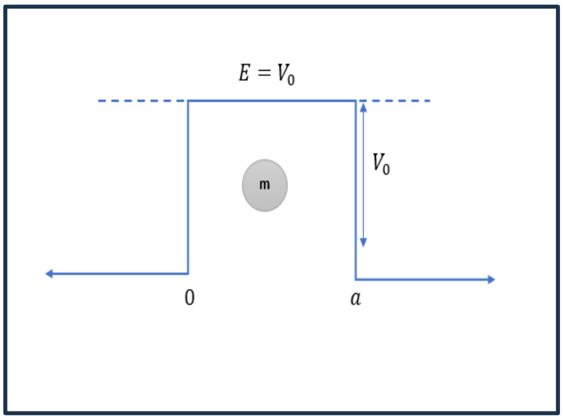
$$T = \frac{1}{1+\frac{(\kappa^4-w^2)^2}{4w^2\kappa^2}\sinh^2(2iwa)}.$$

Selanjutnya substitusikan nilai dari $\kappa = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ dan $w = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$ maka dihasilkan bentuk persamaan $T = \frac{1}{\left(1+\frac{V_0^2}{4E(E-V_0)}\right)\sinh^2\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_0)}}$.

Selanjutnya disederhanakan ke dalam bentuk tak berdimensi dengan dimisalkan parameter tak berdimensi $\lambda$ mewakili bentuk variabel berdimensi $\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_0)}$, maka persamaan menjadi $T = \frac{1}{\left(1+\frac{V_0^2}{4E(E-V_0)}\right)\sinh^2\lambda}$ lalu didefinisikan parameter baru $\epsilon \equiv \frac{V_0}{E}$, sehingga bentuk persamaan menjadi bentuk tak berdimensi

$$T = \frac{1}{\left(1+\epsilon\frac{1}{4(\epsilon-1)}\right)\sinh^2\lambda}. \quad (23)$$

**Kasus $E = V_0$**




**Gambar 8. Kasus $E = V_0$**

Selanjutnya menentukan koefisien transmisi T pada kasus ini, ditinjau mulai dari daerah I dan III dengan persamaan Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi$, jika $V_0 = 0$ maka persamaan menjadi $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$ dihasilkan bentuk $\beta = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ dan fungsi gelombang $\psi_1 = Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}$, $\psi_3 = Ee^{i\beta x}$. Selanjutnya tinjau daerah II dengan persamaan Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + E\psi_2 = E\psi_2$ lalu dihasilkan bentuk fungsi $\psi_2 = C + Dx$. selanjutnya tinjau syarat kontiunuitas dari $\psi_1(x) = \psi_2(x)$ jika $x = -a$ maka dihasilkan persamaan berikut

$$Ae^{-i\beta a} + Be^{i\beta a} = C - Dx. \quad (23.a)$$

Lalu turunkan persamaan (23.a) $\left.\frac{d\psi_1}{dx}\right|_{x=-a}$ $\left.\frac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=-a}$, maka

$$i\beta Ae^{-i\beta a} - i\beta Be^{i\beta a} = D. \quad (23.b)$$

Sedangkan untuk tinjau $\psi_2(x) = \psi_3(x)$ jika $x = a$ maka persamaan menjadi

$$C + Da = Fe^{i\beta a}. \quad (23.c)$$

Lalu turunkan persamaan (23.c), menjadi

$$D = i\beta\, Fe^{i\beta a}. \quad (23.d)$$

Selanjutnya persamaan (23.a) jumlahkan dengan persamaan (23.c), menjadi

$$Ae^{-i\beta a} + Be^{i\beta a} + Fe^{i\beta a} = 2C. \quad (23.e)$$

Persamaan (23.a) kurangi persamaan (23.c), menjadi

$$Ae^{-i\beta a} + Be^{i\beta a} - Fe^{i\beta a} = -2Da. \quad (23.f)$$

Persamaan (23.d) substitusikan ke persamaan (23.b), menjadi

$$i\beta Ae^{-i\beta a} - i\beta Be^{i\beta a} = i\beta Fe^{i\beta a}. \quad (23.g)$$

Persamaan (23.d) substitusikan ke persamaan (23.f), menjadi

$$Ae^{-i\beta a} + Be^{i\beta a} - Fe^{i\beta a} = -2ai\beta Fe^{i\beta a}. \quad (23.h)$$

Persamaan (23.h) dikalikan dengan $i\beta$, menjadi

$$i\beta Ae^{-i\beta a} + i\beta Be^{i\beta a} - i\beta Fe^{i\beta a} = -2i\beta^2 aFe^{i\beta a}. \quad (23.i)$$

Persamaan (23.g) dijumlahkan dengan persamaan (23.i), menjadi $2i\beta Ae^{-2i\beta a} = i\beta Fe^{i\beta a}(2 - 2ai\beta^2)$ lalu disederhanakan menjadi $\frac{F}{A} = \frac{2i\beta e^{-2i\beta a}}{2-2ai\beta^2}$. Maka untuk koefisien transmisi $T$, menjadi

$$T = \left|\frac{J_{terus}}{J_{datang}}\right| = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \left|\frac{F}{A}\right|^* \left|\frac{F}{A}\right|,$$

$$T = \left(\frac{2i\beta e^{-2i\beta a}}{2 - 2ai\beta^2}\right)^* \cdot \left(\frac{2i\beta e^{-2i\beta a}}{2 - 2ai\beta^2}\right),$$

$$T = -\frac{4\beta^2}{4 + 4a^2\beta^4},$$

$$T = -\frac{2}{2 + 2\frac{a^2 2mE}{\hbar^2}}.$$

Selanjutnya menghilangkan variabel berdimensi dalam kasus ini, memilih $\lambda$ sebagai parameter tak berdimensi yang mewakili bentuk $\frac{a^2 2mE}{\hbar^2}$. Sehingga persamaan menjadi bentuk tak berdimensi

$$T = -\frac{2}{2 + 2\lambda}. \tag{24}$$

Dengan demikian, penerapan konsep tak berdimensi pada model satu dimensi, khususnya pada kasus potensial penghalang ini, memfasilitasi analisis yang lebih abstrak dan umum. Penerapan konsep tak berdimensi dengan pemecahan persamaan Schr$\ddot{o}$dinger untuk menentukan koefisien transmisi. Dengan pemecahan persamaan Schr$\ddot{o}$dinger untuk kasus $E < V_0$ dapat diperoleh koefisien transimi T dalam bentuk tak berdimensi $T(\epsilon, \lambda) = \frac{1}{\left(1+\frac{\epsilon}{4(1-\epsilon)}\right)\sinh^2\lambda}, 0 \le \epsilon \le\le 1,$ kasus $E = V_0$ diperoleh koefisien transmisi $T$ dalam bentuk tak berdimensi $T(\epsilon, \lambda) = \frac{2}{2+\lambda}, \epsilon = 1$ dan $E > V_0$ dihasilkan koefisien transmisi $T$ dalam bentuk tak berdimensi $T(\epsilon, \lambda) = \frac{1}{1+\frac{\epsilon}{4(\epsilon-1)}}\sinh^2\lambda,$ $\epsilon > 1.$

## II. Analisis Persamaan pada Atom Hidrogen

### i. Kasus Hukum Coulomb

Operator Hamiltonian untuk sistem $k$ partikel massa $m_i$ dengan muatan $q_i$ di posisi $r_i$. Jika diketahui energi kinetik $T = -\frac{\hbar^2}{2mi}\nabla_i^2$ dan energi potensial $V = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}}$ selanjutnya disubstitusikan ke dalam persamaan Hamiltonian $H = T + V$, maka persamaan menjadi $H = -\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2 + \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}},$ untuk suku pertama didefinisikan nilai $i = 1,2,3 \ldots k$ sedangkan pada suku kedua didefinisikan nilai $i = 1,2,3..k - 1$ dan $j = i + 1 \ldots k$. Sehingga bentuk persamaan dituliskan berikut

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla_i^2\sum_{i=1}^{k} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}\sum_{j=i+1}^{k}\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}. \tag{25}$$

Persamaan (25) disederhanakan ke dalam bentuk tak berdimensi, yaitu kedua ruas dikalikan dengan $\frac{m_e L^2}{\hbar^2}$, persamaan menjadi $\widetilde{H} \equiv \frac{m_e L^2}{\hbar^2} = \frac{m_e L^2}{\hbar^2} - \frac{\hbar^2}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{\nabla_i^2}{m_i} + \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}\frac{m_e L^2}{\hbar^2}\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$ selanjutnya evaluasi beberapa bentuk pola, yaitu untuk $\tilde{r} \equiv r_i/L$ dan $\nabla_i^2 \equiv \frac{\widetilde{\nabla}_i^2}{L^2}$ serta juga besaran tak berdimensi $\widetilde{m}_i \equiv m_i m_e$ dan $q_i \equiv \tilde{q}_i e$. Maka persamaan menjadi

$$\widetilde{H} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{\widetilde{\nabla}_i^2}{\widetilde{m}i} + \frac{m_e L e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}\frac{\tilde{q}_i\tilde{q}_j}{\tilde{r}_{ij}}. \tag{26}$$

Persamaan (26) yang terdapat pada suku kedua masih dalam bentuk berdimensi, untuk menghilangkannya, maka dilakukan pemilihan satuan panjang $L$ dari bentuk $\frac{m_e L e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2} = 1$ , sehingga diperoleh bentuk

$$L = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}. \tag{27}$$

Setelah dilakukan pemilihan satuan panjang $L$, lalu persamaan (27) disubstitusikan ke dalam persamaan (26) menjadi $\widetilde{H} \equiv \frac{mL^2}{\hbar^2}H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}\frac{\widetilde{\nabla}_i^2}{\widetilde{m}_i} + \frac{m_e e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}\sum_{i=1}^{K-1}\sum_{j=i+1}^{K}\frac{\tilde{q}_i\tilde{q}_j}{\tilde{r}_{ij}}$. maka dihasilkan persamaan dalam bentuk tak berdimensi yaitu

$$\widetilde{H} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}\frac{\widetilde{\nabla}_i^2}{\widetilde{m}_i} + \sum_{i=1}^{K-1}\sum_{j=i+1}^{K}\frac{\tilde{q}_i\tilde{q}_j}{\tilde{r}_{ij}}. \tag{28}$$

### ii. Kasus Atom Hidrogen

Selanjutnya, dianalisis kasus atom hidrogen dengan mempertimbangkan persamaan

Hamiltonian, yaitu diketahui energi kinetik $T = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ dan potensialnya $V(x) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ jika disubstitusikan ke dalam persamaan umum Hamiltonian $H = T + V$. Maka dihasilkan persamaan berikut

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0 r}. \tag{29}$$

Persamaan (26) yang terdapat bentuk $\frac{m_e L e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}$ dipilih sebagai satuan atom, untuk pemilihannya yaitu $\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e L e^2} = 1$ jika kedua ruas dikalikan dengan $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 L}$ persamaan menjadi $\frac{\hbar^2}{m_e L} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 L}$, didefinisikan $L \equiv a_0$, maka persamaan menjadi

$$\frac{\hbar^2}{m_e a_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}. \tag{30}$$

Menentukan persamaan (29) menjadi persamaan tak berdimensi, maka dimodifikasi bentuk potensialnya menjadi $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \equiv \frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}$ seperti yang terdapat pada persamaan (30), maka persamaan menjadi $\widetilde{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}\frac{1}{r}$. Jika kedua ruas dikalikan dengan $\frac{m_e L^2}{\hbar^2}$ diperoleh $\widetilde{H} = \frac{m_e L^2}{\hbar^2} H = \frac{m_e L^2}{\hbar^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{m_e L^2}{\hbar^2}\frac{\hbar^2}{m_e a_0^2}\frac{1}{r}$. Kemudian didefinisikan $\tilde{r} = r$, dan $\nabla_i^2 = L^{-2}\widetilde{\nabla}_i^2$, maka dihasilkan persamaan berikut

$$\widetilde{H} = -\frac{1}{2\widetilde{m}}\widetilde{\nabla}^2 - \frac{1}{\tilde{r}}. \tag{31}$$

Selanjutnya kita pilih satuan panjang $L$, untuk bentuk pemilihannya sama seperti pada persamaan (27) yaitu $\frac{m_e L e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2} = 1$, kedua ruas dikalikan dengan $\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ maka dihasilkan bentuk persamaan berikut

$$L = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar}{me^2}. \tag{32}$$

Selanjutnya ditinjau ulang dari persamaan (29) tanpa diubah potensialnya maka persamaan dituliskan sebagai $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0 r}$, kedua ruas dikalikan dengan $\frac{m_e L^2}{\hbar^2}$ didapatkan persamaan $\widetilde{H} \equiv \frac{m_e L^2}{\hbar^2} H = \frac{m_e L^2}{\hbar^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{m_e e^2 L^2}{4\pi\hbar^2\epsilon_0 r a_0}$, didefenisikan bentuk variabel jika $\widetilde{r_i} = r$, $L \equiv a_0$ dan $\nabla^2 = L^{-2}\widetilde{\nabla}^2$, maka dihasilkan bentuk persamaan dalam bentuk tak berdimensi, yaitu

$$\widetilde{H} = -\frac{1}{2}\widetilde{\nabla}^2 - \frac{1}{\tilde{r}}. \tag{33}$$

## III. Analisis Persamaan pada Teori perturbasi

### i. Kasus Osilator Anharmonik Kuartik

Pada bagian ini ditunjukkan bahwa persamaan Schrödinger tak berdimensi yang sesuai dapat memfasilitasi penerapan teori gangguan, sehingga diberikan kasus untuk ditinjau dalam teori perturbasi yaitu osilator anharmonik kuartik. Osilator anharmonik kuartik berbeda dengan osilator harmonik sederhana dan osilator morse, osilator anharmonik kuartik pada getaran molekul diatomik tingkat anharmonisitasnya lebih tinggi. Pada osilator anharmonik kuartik selalu melibatkan suku kuadrat dalam ekspansi Taylor dari energi potensial, tentunya dengan model ini digunakan pada efek-efek anharmonik yang lebih kuat pada getaran molekul.

Dengan demikian potensial osilator anharmonik kuartik ditinjau menggunakan operator Hamiltonian yaitu perpaduan antara energi kinetik dan energi potensial. Jika diketahui $T = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ dan $V(x) = \frac{k_2}{2}x^2 + k_4 x^4$, nilai dari energi kinetik dan energi potensial disubstitusikan ke dalam persamaan $H = T + V$, bentuk persamaan menjadi

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{k_2}{2}x^2 + k_4 x^4. \tag{34}$$

Selanjutnya fokus pada bagian potensialnya, kedua ruas dikalikan dengan $\frac{mL^2}{\hbar^2}$ dan untuk koordinat $x \equiv L\tilde{x}$, maka diperoleh persamaan

$$\frac{mL^2}{\hbar^2}V(L\tilde{x}) = \frac{mk_2 L^4}{2\hbar^2}\tilde{x}^2 + \frac{mk_4 L^6}{\hbar^2}\tilde{x}^4. \tag{35}$$

Persamaan (35) masih dalam bentuk berdimensi sehingga untuk menghilangkan satuan berdimensi pada persamaan tersebut maka sebagai solusinya adalah lakukan pemilihan satuan panjang $L$ pada bagian suku osilator harmonik $\frac{mk_2 L^4}{\hbar^2} = 1$, kedua ruas dikalikan dengan $\frac{\hbar^2}{mk_2}$ maka dihasilkan bentuk persamaan

$$L = \left(\frac{2\hbar^2}{mk_2}\right)^{1/4}. \tag{36}$$

Setelah dilakukan pemilihan satuan panjang $L$. Persamaan (32) kedua ruas dikalikan bentuk $\frac{mL^2}{\hbar^2}$ diperoleh persamaan $\widetilde{H} = \frac{mL^2}{\hbar^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{mk_2L^4}{2\hbar^2}\tilde{x}^2 + \frac{mk_4L^6}{\hbar^2}\tilde{x}^4$ dan disubstitusikan persamaan (36) maka diperoleh persamaan berikut

$$\widetilde{H} = \frac{H}{\hbar\omega} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \frac{\tilde{x}}{2} + \lambda\tilde{x}^4. \tag{37}$$

Persamaan (37) dalam bentuk tak berdimensi di mana variabel $\lambda$ dipilih sebagai parameter tak berdimensi yang mewakili variabel dari $\frac{\hbar k_4}{(mk_2^3)^{\frac{1}{2}}}$.

Selanjutnya dilakukan pemilihan satuan panjang $L$ di persamaan (35) bentuk suku kedua $\frac{mk_4L^6}{\hbar^2} = 1$ dihasilkan bentuk pemilihan pertama $L = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{mk_4}}\right)^{1/3}$ kemudian disederhanakan ke bentuk lain dengan meninjau bentuk dari $\frac{\hbar k_4}{(mk_2^3)^{1/2}}$ menjadi $k_4 = \lambda\frac{(mk_2^3)^{1/2}}{\hbar}$ dan dihasilkan bentuk piliha satuan $L$ yang kedua $L = \left(\frac{\hbar}{m\omega\lambda^{\frac{1}{3}}}\right)^{1/2}$. Sehingga hasil dari pemilihan satuan panjang $L$ ditulis ulang yaitu

$$L = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{mk_4}}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad L = \left(\frac{\hbar}{m\omega\lambda^{\frac{1}{3}}}\right)^{1/2}. \tag{38}$$

Setelah dilakukan pemilihan satuan panjang $L$, selanjutnya ditinjau ulang dari persamaan (34) kedua ruas dikalikan dengan bentuk $\frac{mL^2}{\hbar^2}$ persamaan menjadi $\widetilde{H} = \frac{mL^2}{\hbar^2}H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \frac{mk_2}{2\hbar^2}L^4\tilde{x}^2 + \frac{mk_4}{\hbar^2}L^6\tilde{x}^4$ lalu disubstitusikan hasil pemilihan satuan panjang $L$ yaitu $L^2 = \frac{\hbar}{m\omega\lambda^{1/3}}, L^4 = \frac{\hbar^2}{mk_2}, L^6 = \frac{\hbar^2}{mk_4}$, maka dihasilkan persamaan dalam bentuk tak berdimensi

$$\widetilde{H} = \frac{H}{\hbar\omega\lambda^{\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \frac{\tilde{x}^2}{2} + \tilde{x}^4. \tag{39}$$

Selanjutnya, menentukan $f_{(q)}$ dengan mengasumsi bahwa $f_{(q)}$ dapat diperluas dalam deret Taylor. Selanjutnya untuk mengubah bentuk fungsi $f_{(q)}$ menjadi deret Taylor, maka perlu mengekspansi $f_{(q)}$ sebagai deret tak terhingga menggunakan rumus deret Taylor. Menghasilkan bentuk deret Taylor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f_a^n}{n!}\right)(x-a)^n$ dengan $f_a^n$ adalah turunan ke-n dari $f(x)$ di titik $a$. Selanjutnya menentukan turunan $f_{(q)}$ sampai orde ke-2, yaitu $f''(q)$ dan mengekspansi $f_{(q)}$ sehingga persamaan menjadi $f_{(q)} = f_{(0)} + f'_{(0)}q + \frac{1}{2}f''_{(0)}q^2 + \sum_{j=3}^{\infty}\frac{f_{(0)}^j}{j!}q^j$ atau dituliskan bentuk persamaan menjadi

$$f(q) = \sum_{j=2}^{\infty}\frac{f_i}{j!}q_j^2. \tag{40}$$

Selanjutnya, ditinjau potensial yang terdapat di persamaan (10) menggunakan persamaan Hamiltonian. Dalam kasus ini melibatkan perturbasi sehingga potensial yang diberikan dapat mengalami pertambahan deret $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_0f_2}{a}x^2 + \frac{V_0f}{a}x^2$. Didefinisikan suku ketiga potensial yang mengalami pertambahan deret $\frac{V_0f}{a}x^2$, jika $f \equiv f_q$. Sehingga persamaan menjadi $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_0f}{a}x^2 + \frac{V_0(f_q)}{a}x^2$ kemudian kedua ruas dikalikan dengan $\frac{mL^2}{\hbar^2}$ jika $\tilde{x} \equiv \frac{x}{L}$ maka diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned}\widetilde{H} &= \frac{mL^2}{\hbar^2}H \\ &= -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \frac{mL^4V_0f_2}{a\hbar^2}\tilde{x}^2 \\ &+ \sum_{j=2}^{\infty}\frac{f_j}{j!}\frac{mL^{j+2}V_0}{a^j\hbar^2}q^j\tilde{x}^j.\end{aligned} \tag{41}$$

Persamaan (41) masih dalam bentuk tak berdimensi, sehingga dilakukan pemilihan satuan panjang $L$ dari bentuk $\frac{mL^4V_0f_2}{a\hbar^2}$, sehingga diperoleh hasil pemilihan satuan panjang $L$ berikut

$$L^4 = \left(\frac{\hbar^2a}{mV_0f_2}\right). \tag{42}$$

Dengan pemilihan satuan panjang $L$, hasil yang diperoleh disubstitusikan ke dalam persamaan $\widetilde{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \frac{mV_0L^4f_2}{a\hbar^2}\tilde{x}^2 +$

$\sum_{j=3}^{\infty}\frac{f_j}{j!}q^j\frac{mV_0L^{j+2}f_2}{a\hbar^2}\tilde{x}^2$, maka dihasilkan persamaan tak berdimensi berikut

$$\widetilde{H}=-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2}+\tilde{x}^2+\sum_{j=3}^{\infty}\frac{f_j}{j!}\lambda q^j\tilde{x}^j,\lambda=\frac{mV_0L^{j+2}}{a^j\hbar^2}. \quad (43)$$

### ii. Kasus Atom Hidrogen dengan Elektron dan Muatan Nuklir Dalam Pendekatan Inti Terjepit

Menganalisis kasus atom hidrogen dengan elektron dan muatan nuklir dalam pendekatan inti terjepit menggunakan operator Hamiltonian $H=H_0+H'$, $H_0$ adalah persamaan Hamiltonian tanpa gangguan, sedangkan $H'$ merupakan persamaan Hamiltonian gangguan. Menentukan persamaan Hamiltonian tanpa gangguan yaitu substitusikan nilai masing-masing dari energi kinetik $T=-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla_i^2$ dan potensial $V=-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0r_i}$, dengan kedua suku didefinisikan nilai $i=1,2,3,\dots N$ maka bentuk persamaan sebagai

$$H_0=-\frac{\hbar^2}{2m_e}\sum_{i=1}^{N}\nabla_i^2-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_e^2}{4\pi\epsilon_0r_i}. \quad (44.a)$$

Selanjutnya menentukan Hamiltonian gangguan $(H')$ dengan persamaan umumnya adalah $H'=T+V$, untuk energi kinetik $T=0$, sedangkan $V=\frac{e^2}{4\pi\epsilon r_{ij}}$. Didefinisikan notasi sumasi pada koreksi $i=1,2,3\dots N-1$ dan pada koreksi $j=i+1$ sampai dengan N, sehingga bentuk persamaan sebagai

$$H'=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0r_{ij}}. \quad (44.b)$$

Persamaan (44.a) dan persamaan (44.b) kedua persamaan tersebut jika disubstitusikan ke dalam persamaan $H=H_0+H'$, maka bentuk persamaannya menjadi

$$H=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\nabla_i^2-\sum_{i=1}^{N}\frac{m_eL^2Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar r_i}+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{i=i+1}^{N}\frac{m_eL^2e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2r_{ij}}. \quad (45)$$

Persamaan (45) dalam bentuk berdimensi, sehingga dilakukan pemilihan satuan panjang $L$ dari bentuk $\frac{m_eLZ_e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar}=1$, maka diperoleh bentuk $L^2=\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_eZe^2}$ dan disederhanakan ke bentuk lain menjadi $\frac{L^2}{Z}=\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_eZe^2}$, dengan demikian ditulis ulang pemilihan bentuk satuan panjang $L$ sebagai

$$L^2\equiv\frac{4\pi\epsilon_0\hbar}{meZe^2}=\frac{a_0^2}{Z}. \quad (46)$$

Setelah pemilihan satuan panjang $L$, selanjutnya disubstitusikan ke dalam persamaan $H=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\nabla_i^2-\sum_{i=1}^{N}\frac{m_eL^2Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar r_i}+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{i=i+1}^{N}\frac{m_eL^2e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2r_{ij}}$, maka dihasilkan persamaan dalam bentuk tak berdimensi

$$\widetilde{H}=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\widetilde{\nabla}_i^2-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\tilde{r}_i}+\frac{1}{Z}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{i=i+1}^{N}\frac{1}{\tilde{r}_{ij}}. \quad (47)$$

## KESIMPULAN DAN SARAN

Hasil penelitian menunjukan bahwa dengan menggunakan operator Hamiltonian dapat menentukan kasus-kasus yang terdapat pada model potensial satu dimensi, atom hidrogen dan teori perturbasi tak bergantung waktu ke dalam bentuk tak berdimensi. Berikut kasus-kasus yang dapat disederhanakan dalam bentuk tak berdimensi dengan menggunakan operator Hamiltonian

1. Model potensial satu dimensi
   a) Osilator harmonik sederhana
   $$\widetilde{H}=-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2}+\frac{1}{2}\tilde{x}^2$$
   b) Fungsi Energi potensial
   $$\widetilde{H}=-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2}+\lambda f(\tilde{x}),$$
   c) Osilator morse
   $$\widetilde{H}=\frac{m}{\hbar^2a^2}H=-\frac{1}{2}+\frac{d^2}{d\tilde{x}^2}+\lambda\,[1-\exp(-\tilde{x})]^2,\lambda=\frac{mDe}{\hbar^2a^2}$$
   d) Kasus potensial penghalang eksponensial mutlak
   $$\widetilde{H}=\frac{mL^2}{\hbar^2}H=-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2}+\lambda f\tilde{x},$$
   e) Potensial *cut off*
   Bentuk potensial pertama dihasilkan persamaan dalam bentuk tak berdimensi $\frac{\epsilon^2}{\alpha^2}V\epsilon(L\tilde{x})=-1$ dan bentuk potensial keduanya dihasilkan persamaan tak berdimensi $\frac{\epsilon^2}{\alpha^2}V\epsilon(L\tilde{x})=-\frac{\rho_0^2}{\tilde{x}^2}$.

f) Contoh penerapan persamaan tak berdimensi pada potensial penghalang

$$T(\epsilon,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left(1+\frac{\epsilon}{4(1-\epsilon)}\right)} \sinh^2\lambda & 0 \le \epsilon \le 1, \\ \dfrac{2}{2+\lambda} & \epsilon = 1, \\ \dfrac{1}{\left(1+\frac{\epsilon}{4(\epsilon-1)}\right)} \sinh^2\lambda & \epsilon > 1. \end{cases}$$

2. Model Atom Hidrogen

a) Hukum Coulomb

$$\widetilde{H} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}\frac{\widetilde{\nabla}_i^2}{\widetilde{m}_i} + \sum_{i=1}^{K-1}\sum_{j=i+1}^{K}\frac{\tilde{q}_i\tilde{q}_j}{\tilde{r}_{ij}},$$

b) Atom hidrogen

$$\widetilde{H} = -\frac{1}{2}\widetilde{\nabla}^2 - \frac{1}{\tilde{r}}$$

3. Teori Pertubasi tak bergantung waktu

a) Osilator anharmonik

$$\widetilde{H} = \frac{H}{\hbar\omega} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} + \frac{\tilde{x}}{2} + \lambda\tilde{x}^4$$

b) atom hidrogen dengan elektron dan muatan nuklir dalam pendekatan inti terjepit.

$$\widetilde{H} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\widetilde{\nabla}_i^2 - \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\tilde{r}_i} + \frac{1}{Z}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{i=i+1}^{N}\frac{1}{\tilde{r}_{ij}}.$$

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, dapat menentukan persamaan tak berdimensi dalam mekanika kuantum non-relativsitik pada model potensial satu dimensi, model atom hidrogen dan teori perturbasi tak bergantung waktu. Oleh karena itu disarankan bagi pembaca agar melakukan tindak lanjut dengan menggunakan operator Hamiltonian untuk menentukan persamaan tak berdimensi pada kasus model potensial tiga dimensi dalam konteks mekanika kuantum non-relativistik. Adapun pembaca juga menggunakan hasil dari persamaan tak berdimensi model potensial satu dimensi untuk menganalisis kasus lain, dengan pemecahan persamaan Schr$\ddot{o}$dinger dalam menentukan fungsi gelombang pada konteks mekanika kuantum non-relativistik.

**DAFTAR PUSTAKA**

Ahmed, Z., Kumar, S., Ghosh, D., & Goswami, T. (2019). *Solvable model of bound states in the continuum (BIC) in one dimension. Physica Scripta, 94(10).*

Amore, P., & Fernandez, F. M. (2009). *Harmonic oscillator in a one-dimensional box*. INIFTA (UNLP, CCT La Plata-CONICET), Division Teorica, Blvd.

Amrullah, A. (2017). Solusi efek terobosan penghalang ganda dengan persamaan Schrodinger dua dimensi. Jember: Universitas Jember.

Capri, Z. A. (2002). *nonrelativistic-quantum-mechanics-anton-z-capri-ed--annas-archive* (Third Editon). Department of Physics. University of Alberta.

Fernández, F. M. (2020). *Dimensionless equations in non-relativistic quantum mechanics*. INIFTA, Division Quimica Teorica Blvd.

Ferna□ndez, F. M. (2001). *Introduction to perturbation theory in quantum mechanics*. CRC Press, Boca Raton.

Gasiorowiez, S. 1996. *Quantum Physics Second Edition.* Kanda: John Wiley and Sons, Inc

Griffiths, D. J. (1994). Introduction to quantum mechanics. In *Principles of Quantum Computation and Information*. Prentice Hall. https://doi.org/10.1142/9789813237230_0003

Griffiths, D. J. (2005). *Introduction to Quantum Mechanics (Second Edi)*. Pearson Education, Inc.

Ikot, A.N., Okorie, U.S., Rampho, G.J. *et al.* (2021) *Approximate Analytical Solutions of the Klein–Gordon Equation with Generalized Morse Potential. Int JThermophys* 42,10.https://doi.org/10.1007/s10765-020-02760-2

Krane, S. K. (2019). *Modern Physics: Forth Edition*.

Landau. D. L & Lifshitz. M. E. *Quantum Mechanics Non-Relativistic Theory*, volume III of *Course of Theoretical Physics*. Butterworth-Heinemann, 3edition, 1981.

Marwan Al-Raei & Moustafa. S. El-Daher. (2020). *An algorithm for fractional Schrödinger equation in case of Morse potential*. AIP Advances 10, 035305.

Nguyen, T. X., & Marsiglio, F. (2019). *Numerical and Analytical Study of the Bound States of the* $-\alpha/x^2$ *Potential.* Departement of Physics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, T6G 2E1.

Noer, Z. & Dayana I. (2021). Pengantar Mekanika Kuantum. GUE

Nurul Ain. & dkk. (2023). *Schrödinger Wave Equation for Simple Harmonic Ocillator*. International Association of STM Publishers.

Rae, A. I. M. (2002). *Quantum mechanics*. Department of Physics University of Birmingham Uk.

Turbiner, V. A. & Rosales, J. C. D. V. (2023). *Quantum Anharmonic Oscillator.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd

Singh, R.B. (2009). *Introduction to Modern Physics Volume 1*. New Delhi: New Age International Publishers.

Siregar, R. E. (2018). FISIKA KUANTUM. Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Padjadjaran.

Walecka, J. (2008). *INTRODUCTION TO MODERN PHYSICS:Theoretical Foundations*. World Scientific Publishing Company.

Walecka, D. J. (2013). *Topic In Modern Physics*: Theoretical Foundations. World Scientific Publishing Company.