JoP, Vol.10 No.2, April 2025: 8 - 20 ISSN: 2502-2016

SEBUAH *REVIEW* TENTANG PERTURBASI PADA *OSILATOR HARMONIK KUANTUM* DAN EFEKNYA TERHADAP *TEORI MEDAN ELEKTROMAGNETIK KUANTUM*

Ristiani Paskaria Tang[1*], Herry Fridolin Lalus[1], Hartoyo Yudhawardana[1]
[1] *Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Nusa Cendana, Kupang, 85000, Indonesia*
*email: ristianiitang@gmail.com

ABSTRAK

Tulisan ini menyajikan review dari sebuah artikel yang berjudul "Perturbation of Quantum Harmonic Oscillator and its effect on Quantum Electromagnetic Field Theory", yang membahas tentang Hamiltonian osilator harmonik yang telah diketahui mengalami perturbasi dari luar karena adanya medan elektromagnetik. Penelitian ini memiliki tujuan untuk mengkaji efek dari adanya perturbasi pada osilator harmonik kuantum terhadap teori medan elektromagnetik kuantum, serta interaksi antara medan listrik dan medan magnetik sehingga dapat memunculkan Hamiltonian baru dengan menggunakan metode aljabar yang memuat operator kreasi dan operator anihilasi yang dapat berevolusi terhadap waktu sehingga dapat mempengaruhi keadaan koheren sistem. Dalam penelitian ini, Hamiltonian osilator harmonik yang telah diketahui dapat mengalami perturbasi dari luar karena adanya interaksi dengan medan elektromagentik, di mana Hamiltonian dari medan elektromagentik ini mirip dengan Hamiltonian osilator harmonik kuantum, sehingga ketika diberikan perturbasi, akan terbentuk Hamiltonian baru. Dengan menggunakan Hamiltonian medan eletormagnetik kuantum, maka dapat dianalisis representasi medan listrik yang terkait dengan keadaan koheren. Hasil dari penelitian ini adalah ditemukan bahwa terdapat transisi Hamiltonian medan elektromagentik ketika medan listrik diamati yaitu ketika osilator non-perturbasi berubah menjadi osilator terperturbasi.

Kata Kunci: *Perturbasi; Osilator Harmonik Kuantum; Teori Medan Elektromagnetik Kuantum; Keadaan Koheren; Evolusi Waktu*

ABSTRACT

[Title: A Review on Perturbations in Quantum Harmonic Oscillators and It's Effects on Quantum Electromagnetic Field Theory] *This paper presents a review of a article titled "Perturbation of Quantum Harmonic Oscillator and its effect on Quantum Electromagnetic Field Theory", which discusses the Hamiltonian of a harmonic oscillator known to experience external perturbation due tot he presence of an electromagetic field. The research intends to explore the effects of perturbation on the quantum harmonic oscillator towards the theory of quantum electromagnetic fields, as well as the interaction between electric and magnetic fields, thereby generating a new Hamiltonian using algebraic methods involving creation and annihilation operators that evolve over time and can influence the coherent state of the system. In this research, the known Hamiltonian of the harmonic oscillator can undergo external perturbation due to interaction with electromagnetic fields, where the Hamiltonian of the electromagnetic field is similar to the Hamiltonian of quantum harmonic oscillator, so when perturbed, a new Hamiltonian will be formed. By using the Hamiltonian of the quantum electromagnetic field, the representation of the electric field related to coherent states can be analyzed. The result of this research is the discovery of a observed, specifically when the non-perturbed oscillator changes into a perturbed oscillator.*

Keywords: *Perturbation; Quantum Harmonic Oscillator; Quantum Electromagnetic Field Theory; Coherent States; Time Evolution*

PENDAHULUAN

Dalam ilmu fisika, mekanika mempelajari tentang gerak dan interaksi dari benda-benda di alam semesta dengan dua bidang utama, yaitu mekanika klasik dan mekanika kuantum. Mekanika klasik menjelaskan gerakan benda yang berukuran makroskopik sehingga ketika ukuran benda semakin kecil, hukum-hukum dalam mekanika klasik tidak mampu memberikan penjelasan yang tepat terkait perilaku dari partikel-partikel sub-atomik (Zettili, 2001). Ketidakmampuan tersebut memunculkan pengembangan teori fisika baru, yaitu mekanika kuantum dengan sistem yang paling sederhana adalah osilator harmonik yang dapat dijelaskan dengan eksak, baik dalam teori klasik maupun kuantum karena sifatnya yang relatif sederhana dan mampu menjelaskan berbagai fenomena fisika (Shankar, 1994). Osilator harmonik kuantum yang sistem dasarnya telah diketahui dapat mengalami perubahan kecil dalam potensial atau Hamiltonian sistem. Perubahan tersebut disebabkan karena adanya perturbasi yang hanya berupa gangguan kecil sehingga tidak merubah suatu sistem secara mendasar (Nurlina, 2017). Perturbasi pada osilator harmonik murni dapat ditemukan dalam salah satu fenomena fisika, yaitu medan elektromagnetik kuantum.

Teori medan elektromagnetik kuantum menggambarkan fenomena fisika dalam skala mikroskopik dan energi rendah dengan kerangka kerja mekanika kuantum utuk menggambarkan medan elektromagnetik dalam bentuk partikel-partikel diskret yang disebut foton (Jun, 2014). Dalam penelitian ini, efek perturbasi dalam medan elektromagnetik kuantum digunakan untuk menggambarkan interaksi antara partikel sub-atomik seperti foton. Gelombang-gelombang foton kemudian saling terkait secara kuantum dalam keadaan koheren sehingga menghasilkan medan listrik yang seharusnya dapat mewakili medan listrik klasik. Dalam hal ini, keadaan koheren adalah keadaan kuantum yang sifatnya sangat mirip dengan keadaan klasik (Desai, 2010). Keadaan koheren juga didefinisikan sebagai keadaan yang dinamikanya sedekat mungkin atau mirip dengan dinamika gerak klasik (Razavy, 2011). Namun, nilai harapan yang diperoleh memberikan ekspresi kompleks yang tidak menyerupai persamaan gelombang medan listrik klasik. Hal ini disebabkan oleh fakta bahwa, ketika terjadi perubahan Hamiltonian, maka evolusi waktu dari opertor medan listrik juga akan berubah sehingga munculnya keadaan koheren tidak hanya menggunakan aljabar yang diketahui saja. Dengan demikian, dalam penelitian ini ditawarkan pemecahan masalah berupa pendekatan baru yang dapat menjelaskan mengapa keadaan koheren dapat memberikan hasil yang akurat untuk medan listrik dan bagaimana pendekatan tersebut dapat digunakan untuk menentukan efek perturbasi terhadap medan elektromagnetik kuantum. Berdasarkan kajian tersebut, maka penulis melakukan kajian pada jurnal *Perturbation of Quantum Harmonic Oscillator and its effect on Quantum Electromagnetic Field Theory* (Sahu, 2019). Review artikel ini dilakukan karena persamaan-persamaan yang terdapat dalam artikel tersebut membutuhkan analisis lebih mendalam agar dapat memudahkan pembaca dalam memahami artikel dengan baik.

METODE

Penelitian ini adalah sebuah penelitian fisika teoretik dengan menggunakan metode aljabar yang memuat operator kreasi $\hat{a}^\dagger$ dan operator anihilasi $\hat{a}$ yang juga digunakan dalam persamaan Dirac. Dalam menganalisis perturbasi pada osilator harmonik kauntum dan efeknya terhadap teori medan elektromagnetik kuantum, terdapat persamaan-persamaan yang tidak diturunkan secara detail sehingga perlu dilakukan analisis lebih mendalam dalam menindaklanjuti bagaimana efek dari perturbasi atau gangguan pada osilator harmonik kuantum dapat mempengaruhi medan elektromagnetik kuantum. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini yakni dengan menentukan Hamiltonian dari osilator harmonik kuantum, setelah Hamiltoniannya telah diperoleh, maka persamaannya digunakan untuk menentukan operator kreasi dan anihilasi dalam konteks osilator harmonik kuantum. Kemudian menentukan evolusi waktu yang memuat operator posisi dan operator momentum. Dalam hal ini, penggunaan kedua operator tersebut secara eksplisit sering dihindari saat menganalisis osilator harmonik kuantum karena *eigenstate* dari Hamiltonian tersebut adalah energi *eigenstate* yang menyebabkan sehingga operator posisi dan momentum dapat diubah menjadi energi dengan cara mendefinisikan operator kreasi $\hat{a}^\dagger$ dan anihilasi $\hat{a}$ untuk osilator harmonik kuantum. Selanjutnya menentukan keadaan koheren operator kreasi dan anihilasi. Langkah selanjutnya adalah menentukan representasi medan listrik yang terkait dengan keadaan keadaan koheren, setelah itu menentukan Hamiltonian terperturbasi dari osilator harmonik kuantum, dan langkah terakhir yang dilakukan adalah menentukan nilai harap medan listrik dalam keadaan tereksitasi pertama dari Hamiltonian osilator terperturbasi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam mekanika kuantum, terdapat energi yang dapat diamati dan dijelaskan oleh sebuah operator yang disebut operator Hamiltonian (Phillips, 2003). Operator Hamiltonian mencakup energi kinetik dan energi potensial, sehingga dalam hal ini dapat mewakili energi total sistem kuantum yang secara matematis dinyatakan dalam persamaan Schrödinger tak bergantung waktu yang diberikan oleh $\hat{H}\psi = E\psi$ (Griffiths, 2005). Persamaan Hamiltonian diperoleh ketika energi kinetik dan energi potensial dari osilator harmonik klasik dijumlahkan dengan mempertimbangkan energi kinetik $\left(T = \frac{p^2}{2m}\right)$ dan energi potensial $\Big(V =$

$\frac{1}{2}kx^2\Big)$ dengan $k = m\omega^2$. Sehingga diperoleh Hamiltonian, yaitu $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

Variable-variable klasik yang dalam hal ini adalah posisi dan momentum perlu digantikan dengan operator kuantum yang sesuai. Dalam mekanika kuantum, kedua operator tersebut akan berperilaku berbeda dalam dua representasi, yaitu representasi posisi dan momentum. Dalam representasi posisi, keadaan dasarnya adalah keadaan eigen dari posisi sehingga opertor posisi $x \equiv \hat{x}$ dan operator momentum $p \equiv \hat{p}$, di mana $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ (Bowman, 2008). Dengan demikian Hamiltonian untuk osilator harmonik kuantum diberikan oleh:

$$\widehat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\,m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \tag{1}$$

di mana operator $\hat{x}$ dan $\hat{p}$ tidak komutatif karena hasil dari relasi komutasi kedua operator tersebut tidak sama dengan nol $([\hat{x}, \hat{p}] \neq 0)$, dan relasi komutasi keduanya adalah $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ (Sudiarta, 2012).

Persamaan Hamiltonian untuk osilator harmonik kuantum juga dapat ditentukan menggunakan operator kreasi dan operator anihilasi. Sistem osilator harmonik dapat dianalisis dengan menggunakan dua metode, yaitu metode analitik dan aljabar (Aryani et al., 2021), yang diperoleh dari pendefinisian persamaan $\widehat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\,m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$, yaitu $\hat{A}^2 \equiv \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$ dan $\hat{B}^2 = \frac{\hat{p}^2}{2\,m}$, sehingga $\widehat{H} = \hat{A}^2 + \hat{B}^2$, dan dengan operasi aljabar maka Hamiltoniannya menjadi $\widehat{H} = (\hat{A} + i\hat{B})(\hat{A} - i\hat{B}) - i[\hat{B}, \hat{A}]$, di mana $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ tidak komutatif $([\hat{A}, \hat{B}] \neq 0)$, sehingga $[\hat{B}, \hat{A}] = -\frac{\omega i\hbar}{2}$. Kemudian dilakukan manipulasi matematis, maka diperoleh

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \tag{2}$$

dan

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \tag{3}$$

yang adalah operator anihilasi dan operator kreasi dengan $\hat{a}$ dan $\hat{a}^\dagger$ tidak komutatif, sehingga

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \tag{4}$$

Yang menggambarkan bahwa komutator antara operator anihilasi dan operator kreasi adalah operator identitas yang mencerminkan sifat-sifat dasar dari operator kreasi dan anihilasi dalam konteks mekanika kuantum.

Dengan menggunakan persamaan (2) dan (3), maka dapat digambarkan keadaan-keadaan energi yang berbeda dalam sistem osilator harmonik, di mana $\widehat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\right)$.

Jika $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = (\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a})$, maka dengan meninjau kembali persamaan (4) diperoleh $\hat{a}\hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger\hat{a}$ dan $\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}\hat{a}^\dagger - 1$. Persamaan tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan $\widehat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\right)$ sehingga diperoleh bentuk lain dari Hamiltonian sistem yang dapat dinyatakan dengan menggunakan operator anihilasi $\hat{a}$ dan kreasi $\hat{a}^\dagger$.

Dalam sistem osilator harmonik kuantum, keadaan *(state)* dapat dinyatakan dalam bentuk $|n\rangle$, di mana suatu fungsi keadaan $|n\rangle$ dinyatakan dengan $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ dan $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$, sehingga jika $\hat{a}$ dan $\hat{a}^\dagger$ dikerjakan terhadap $|n\rangle$, maka diperoleh $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$.

Jika $\widehat{H}\psi = E\psi$, dan $\widehat{H}$ bekerja pada *state* $|n\rangle$, maka $\widehat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, dengan $n = 0,1,2,3,\ldots$ sehingga dengan meninjau kembali persamaan $\widehat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ maka akan diperoleh $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ yang menunjukkan adanya energi minimum yang tidak hilang pada keadaan dasar $n = 0$ (Gangaraj et al., 2024).

Analisis Evolusi Waktu dan Keadaan Koheren Operator Kreasi dan Anihilasi

Bentuk umum dari evolusi waktu suatu sistem kuantum yang menggambarkan perubahan sistem seiring waktu diberikan oleh $|\psi_S(t)\rangle = \widehat{U}(t, t_0)|\psi_S(t_0)\rangle$. Derivasi terhadap waktu t menyebabkan persaman tersebut menjadi $\frac{d}{dt}|\psi_S(t)\rangle = \frac{d}{dt}\widehat{U}(t, t_0)|\psi_S(t_0)\rangle$.

Diketahui persamaan transformasi uniter untuk suatu operator $\hat{A}$, yaitu :

$$\hat{A}_H(t) = U^\dagger(t, 0)(\hat{A}_S)\widehat{U}(t, 0)$$

(Nolting, 2017), yang menggambarkan bentuk transformasi operator dari representasi Schrödinger ke representasi Heisenberg seiring berjalannya waktu. Dalam hal ini, $U^\dagger(t, 0)\widehat{U}(t, 0) = \widehat{U}(t, 0)U^\dagger(t, 0) = \hat{1}$, dengan $\widehat{U}(t, 0)$ adalah operator uniter (CETINTAS, 2019). Gunakan turunan terhadap waktu dari persamaan $\hat{A}_H(t)$, kemudian gunakan aturan rantai, sehingga diperoleh:

$$i\hbar\frac{d\hat{A}_H}{dt} = [\hat{A}_H, \widehat{H}_H] + i\hbar\left(\frac{\partial\hat{A}_S}{\partial t}\right)_H. \tag{5}$$

Jika diasumsikan $\hat{A}_S$ tak bergantung waktu atau konstan $\left(\frac{\partial\hat{A}_S}{\partial t} = 0\right)$, maka persamaannya menjadi

$i\hbar\frac{d\hat{A}_H}{dt} = [\hat{A}_H, \hat{H}_H]$, di mana $\hat{A}_H$ dan $\hat{H}_H$ saling komutatif $([\hat{A}_H, \hat{H}_H] = 0)$, sehingga turunan waktu dari operator $\hat{A}_H$ adalah nol $\frac{d\hat{A}_H}{dt} = 0$, yang berarti bahwa operator tersebut adalah konstan sepanjang waktu. Namun jika $\hat{A}_H$ dan $\hat{H}_H$ tidak komutatif $([\hat{A}_H, \hat{H}_H] \neq 0)$, maka turunan waktu dari operator $\hat{A}_H$ tidak nol dan operator tersebut akan mengalami evolusi waktu.

Operator $\hat{A}_H$ adalah operator yang ingin diketahui evolusi waktunya, maka jika didefinisikan $\hat{A}_H$ adalah operator posisi $\hat{x}$ $(\hat{A}_H \equiv \hat{x}_H)$ dan $\hat{H}_H$ adalah Hamiltonian sistem serta transformasi uniternya menjadi $\hat{x}_H(t) = U^{\dagger}(t,0)(\hat{x}_S)\hat{U}(t,0)$ atau $\hat{x}_H = U^{\dagger}\hat{x}_S\hat{U}$, maka persamaan untuk mencari evolusi waktu operator posisi, yaitu

$$\frac{d\hat{x}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}U^{\dagger}[\hat{x}, \hat{H}_H]\hat{U}.$$

Digunakan Hamiltonian untuk sistem osilator harmonik kuantum pada persamaan (1), kemudian disubstitusikan ke dalam nilai $\hat{H}_H$:

$$\frac{d\hat{x}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}U^{\dagger}\left[\hat{x}, \left(\frac{\hat{p}^2}{2\,m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\right)\right]\hat{U}$$

$$\frac{d\hat{x}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}U^{\dagger}\left[\hat{x}, \frac{\hat{p}^2}{2\,m}\right]\hat{U} + \frac{i}{\hbar}U^{\dagger}\left[\hat{x}, \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\right]\hat{U} = \frac{i}{2m\hbar}U^{\dagger}[\hat{x}, \hat{p}^2]\hat{U}$$

$$\frac{d\hat{x}_H}{dt} = \frac{i}{2m\hbar}U^{\dagger}(2i\hbar\hat{p})\hat{U} = \frac{U^{\dagger}\hat{p}\hat{U}}{m}$$

$$\frac{d\hat{x}_H}{dt} = \frac{\hat{p}_H}{m}$$

di mana persamaan tersebut akan digunakan untuk menentukan evolusi waktu operator posisi.

Operator $\hat{A}_H$ juga dapat didefinisikan sebagai operator momentum $\hat{p}$ $(\hat{A}_H \equiv \hat{p}_H)$ dan $\hat{H}_H$ adalah Hamiltonian sistem serta transformasi uniternya menjadi $\hat{p}_H(t) = U^{\dagger}(t,0)(\hat{p}_S)\hat{U}(t,0)$ atau $\hat{p}_H = U^{\dagger}\hat{x}_S\hat{U}$, kemudian susbtitusikan Hamiltonian osilator harmonik kuantum ke dalam nilai dari $\hat{H}_H$, maka diperoleh

$$\frac{d\hat{p}_H}{dt} = -m\omega^2\hat{x}_H.$$

Mengambil turunan waktu dari persamaan untuk operator momentum $\frac{d\hat{p}_H}{dt} = -m\omega^2\hat{x}_H$, kemudian dikerjakan turunan waktu terhadapnya, yaitu $\frac{d}{dt}\frac{d\hat{p}_H}{dt} = \frac{d}{dt}(-m\omega^2\hat{x}_H)$, maka diperoleh $\frac{d^2\hat{p}_H}{dt^2} = -m\omega^2\frac{d\hat{x}_H}{dt}$. Hasil tersebut akan digunakan untuk mencari evolusi waktu operator posisi $\frac{d\hat{x}_H}{dt}$ yang telah diperoleh sebelumnya, sehingga jika nilainya disubstitusikan ke dalam persamaan tersebut maka:

$$\frac{d^2\hat{p}_H}{dt^2} = -m\omega^2\frac{\hat{p}_H}{m}$$

$$\frac{d^2\hat{p}_H}{dt^2} = -\omega^2\hat{p}_H$$

$$\frac{d^2\hat{p}_H}{dt^2} + \omega^2\hat{p}_H = 0$$

di mana persamaan tersebut adalah persamaan diferensial biasa (PDB) orde 2. Dari persamaan tersebut diberikan pemisalan dengan $\frac{d}{dt} \equiv D$, sehingga $D^2p_H + \omega^2p_H = 0$, kemudian faktorkan menjadi $(D+i\omega)(D-i\omega)p_H = 0$ dan hasil dari pemfaktoran tersebut didefinisikan

$$(D+i\omega)u = 0 \tag{5a}$$

dan

$$(D-i\omega)p_H = u. \tag{5b}$$

Mengambil persamaan (5a) kemudian susbtitusikan nilai $D = \frac{d}{dt}$ ke dalam persamaan tersebut, sehingga $\frac{du}{dt} + i\omega u = 0$, kemudian mengubah persamaan tersebut menjadi $\frac{du}{dt} = -i\omega u$. Lakukan pemisahan variable dan pengintegrasian pada kedua sisi untuk menentukan bentuk persamaan diferensial baru untuk u:

$$\frac{du}{u} = -i\omega d \Rightarrow \int\frac{du}{u} = -\int i\omega dt$$

$$\ln u = -i\omega t + \ln C \Rightarrow u = e^{-i\omega t} + e^{\ln C}$$

sehingga

$$u = Ce^{-i\omega t}, \tag{5c}$$

yang akan digunakan sebagai solusi untuk u. Selanjutnya, substitusikan persamaan (5c) ke dalam persamaan (5b), diperoleh:

$$\frac{d\hat{p}_H}{dt} - i\omega\hat{p}_H = Ce^{-i\omega t} \tag{5d}$$

yang merupakan PDB orde 1 non-homogen karena hasil di ruas kanan persamaan adalah bukan nol (non-nol) (Maya, 2014), dengan sifat dasar PDB orde 1 non-homogen adalah $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ dengan solusi persamaan $y(x) = e^{-I}\int qe^{-I}dx + ce^{-I}$, di mana nilai $I = \int p(x)dx$. Dengan demikian,nilai dari I menjadi $I = \int \hat{p}(t)dt = \int_0^t -i\omega\, dt = -i\omega t$, dan jika $y \equiv \hat{p}_H$, maka:

$$\hat{p}_H(t) = e^{-I}\int qe^{-I}dt + ce^{-I}$$

$$\hat{p}_H(t) = Ce^{i\omega t}\int e^{-2i\omega t}\,dt + ce^{i\omega t}$$

$$\hat{p}_H(t) = Ce^{i\omega t}\left(-\frac{1}{2i\omega}\right)e^{-2i\omega t} + ce^{i\omega t}$$

$\hat{p}_H(t) = -\frac{C}{2i\omega}e^{-i\omega t} + ce^{i\omega t}.$

Dari persamaan tersebut didefinisikan $c \equiv A_1$ dan $-\frac{C}{2i\omega} \equiv A_2$, sehingga persamaan untuk $\hat{p}_H(t)$ menjadi $\hat{p}_H(t) = A_1e^{i\omega t} + A_2e^{-i\omega t}$. Mengingat rumus Euler di mana $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm \sin\theta$ (Griffiths & Schroeter, 2018), maka persamaan untuk $e^{i\omega t}$ dan $e^{-i\omega t}$ masing-masing menjadi $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin e^{i\omega t}$ dan $e^{-i\omega t} = \cos(-\omega t) + i\sin(-\omega t) = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$ yang kemudian ekspresi keduanya disubstitusikan ke dalam persamaan $\hat{p}_H(t)$ dan selanjutnya mengelompokkan bagian real dan imajiner:

$$\hat{p}_H(t) = A_1e^{i\omega t} + A_2e^{-i\omega t}$$
$$\hat{p}_H(t) = A_1\left(\cos(\omega t) + i\sin e^{i\omega t}\right) + A_2(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$$
$$\hat{p}_H(t) = (A_1 + A_2)\cos(\omega t) + i(A_1 - A_2)\sin(\omega t).$$

Dengan demikian, diperoleh solusi untuk mencari evolusi waktu operator momentum, yaitu

$$\hat{p}_H(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t).$$

Dengan melakukan langkah-langkah yang sama, maka akan diperoleh solusi untuk mencari evolusi waktu untuk operator posisi, yaitu:

$$\hat{x}_H(t) = Ccos(\omega t) + Dsin(\omega t).$$

Oleh karen persamaan $\hat{p}_H(t)$ dan $\hat{x}_H(t)$ memuat amplitudo A, B, C dan D, maka dapat dicari nilai dari keempat amplitudo tesebut dengan menggunakan batas keadaan sistem, yaitu pada saat $t = 0$. Sehingga diperoleh $C = \hat{x}$, $D = \frac{\hat{p}}{m\omega}$, dengan demikian diperoleh evolusi waktu operator posisi, yaitu:

$$\hat{x}_H(t) = \hat{x}cos(\omega t) + \frac{\hat{p}}{m\omega}sin(\omega t). \quad (6)$$

Pada saat $t = 0$, maka diperoleh nilai dari amplitudo $A = \hat{p}$, dan $B = -m\widehat{\omega}\hat{x}$. Dengan demikian, dapat disubstitusikan nilai A dan nilai B ke dalam persamaan $\hat{p}_H(t)$, sehingga:

$$\hat{p}_H(t) = \hat{p}cos(\omega t) - m\omega\hat{x}sin(\omega t), \quad (7)$$

dengan catatan bahwa di sini operator Schr$\ddot{o}$dinger tidak diikuti oleh subskrip S sehingga Hamiltonian Heisenberg $\widehat{H}_H$ dapat ditulis sebagai:

$$\widehat{H}_H = \frac{\hat{p}_H^2(t)}{2\,m} + \frac{m\omega^2\hat{x}_H^2(t)}{2}.$$

Substitusikan persamaan $\hat{x}_H(t)$ dan $\hat{p}_H(t)$ ke dalam persamaan Hamiltonian tersebut, sehingga diperoleh:

$$\widehat{H}_H = \widehat{H}_S. \quad (8)$$

Operator posisi dan operator momentum dapat dubah menjadi opertor energi dengan mendefinisikan operator kreasi dan opertor anihilasi dengan meninjau kembali persamaan (2) dan (3). Untuk membuktikan bahwa Hamiltonian sistem dapat ditulis ulang dalam dua operator, maka yang dilakukan adalah mengalikan opertor kreasi dan anihilasi tersebut untuk memperoleh Hamiltonian dalam representasi posisi-momentum atau representasi energi, sehingga diperoleh

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{\hat{p}^2}{2\hbar m\omega} + \frac{m\omega\hat{x}^2}{2\hbar} - \frac{1}{2}$$

kemudian menambahkan $\frac{1}{2}$ pada kedua sisi persamaan tersebut dan kalikan setiap sisi dengan $\hbar\omega$, sehingga $\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$,maka Hamiltoniannya yaitu $\widehat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$. Dengan melakukan operasi matematis, maka diperoleh:

$$\hat{a}_H(t) = \hat{a}e^{-i\omega t} \quad (9)$$

lakukan cara yang sama sehingga diperoleh:

$$\hat{a}_H^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}. \quad (10)$$

Saat operator kreasi dan anihilasi berevolusi terhadap waktu, keduanya dapat mempengaruhi keadaan koheren osialtor harmonik kuantum, di mana persamaan umum untuk kedaan koheren dalam mekanika kuantum diberikan oleh:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle \quad (11)$$

di mana nilai dari operator perpindahan $D(\alpha)$ (Glauber, 2014), diberikan oleh:

$$D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} \quad (12)$$

,di mana operator perpindahan tersebut memindahkan posisi atau momentum dari osilator harmonik yang, tergantung pada bilangan kompleks α (Bohr et al., 2017). Untuk mencari ekspresi dari operator anihilasi yang dikerjakan pada keadaan koheren, maka yang perlu dilakukan adalah dengan menambahkan operator anihilasi $\hat{a}$ pada bagian kiri dari tiap ruas persamaan (11), kemudian mensubstitusikan nilai operator perpindahan $D(\alpha)$ dari persamaan (12), sehingga diperoleh keadaan koheren $|\alpha\rangle$ untuk osilator harmonik yang didefinisikan sebagai *eigenstate* dari operator anihilasi $\hat{a}$, yaitu:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (13)$$

di mana persamaan tersebut mencerminkan bahwa keadaan koheren $|\alpha\rangle$ adalah keadaan sendiri dari operator anihilasi $\hat{a}$ dengan nilai eigen α.

Analisis Representasi Medan Listrik yang Terkait dengan Keadaan Koheren

Diberikan bentuk umum persamaan energi elektromagnetik dalam ruang vakum:

$$E = \int d^3 x \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\vec{E}^2(r,t) + c^2 \vec{B}^2(r,t)\right].$$

Persamaan tersebut mencerminkan bahwa energi total yang diberikan dalam suatu ruang terdiri dari kontribusi energi medan listrik dan medan magnetik pada setiap titikk volume. Persamaan medan listrik dan medan magnetik klasik masing-masing diberikan oleh:

$$E_x(z,t) = \sqrt{\frac{2}{V\epsilon_0}} \omega q(t) \sin kz \tag{14}$$

dan

$$B_y(z,t) = \sqrt{\frac{2}{V\epsilon_0}} p(t) \cos kz. \tag{15}$$

Fungsi klasik yang bergantung pada waktu $q(t)$ dan $p(t)$ dalam teori kuantum akan menajdi operator Heisenberg $\hat{q}(t)$ dan $\hat{p}(t)$ dengan hubungan komutasi kedua operator tersebut adalah $[\hat{p},\hat{q}] = i\hbar$. Sehingga energi total medan elektromagentik diberikan oleh:

$$E_{total} = \frac{1}{2}(p^2(t) + \omega^2 q^2(t)).$$

Di sini, variable dinamis $\hat{q}(t)$ bukanlah posisi melainkan pada dasarnya adalah medan listrik, dan variable dinamis $\hat{p}(t)$ bukanlah momentum melainkan medan magnetik. Teori kuantum dari medan elektromagnetik menggunakan struktur yang diimplikasikan oleh hasil klasik pada persamaan sebelumnya. Sehingga dengan energi di atas, dapat diberikan persamaan Hamiltonian:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) \tag{16}$$

(Miller, 2007) yang mirip dengan bentuk Hamiltonian osilator harmonik kuantum. Dalam mekanika kuantum, operator kreasi dan anihilasi untuk osialtor harmonik kauntum dapat didefinisikan dengan menggunakan operator posisi $(\hat{q})$ dan momentum $(\hat{p})$. Sehingga persamaan (16) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode aljabar. Dengan demikian, dapat didefinisikan bahwa $\hat{A}^2 \equiv \frac{\omega^2 \hat{q}^2}{2}$ dan $\hat{B}^2 \equiv \frac{\hat{p}^2}{2}$, sehingga $\hat{H} = \hat{A}^2 + \hat{B}^2$ dengan $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ tidak komut. Oleh karena itu, dicari relasi komutasi dari operator $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ dengan menggunakan langkah aljabar, sehingga $\hat{H} = (\hat{A} + i\hat{B})(\hat{A} - i\hat{B}) - i[\hat{B},\hat{A}]$ dengan $[\hat{B},\hat{A}] = -\frac{\omega i\hbar}{2}$, maka persamaannya menjadi $\hat{H} = \left(\frac{\omega\hat{q}}{\sqrt{2}} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\omega\hat{q}}{\sqrt{2}} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\hbar\omega}{2}$. Dengan melakukan beberapa manipulasi matematis, maka akan diperoleh :

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} + i\hat{p})\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} - i\hat{p})\right) - \frac{1}{2}\right)$$

yang kemudian dari persamaan tersebut akan didefinisikan operator kreasi dan anihilasi, yaitu:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} + i\hat{p}) \tag{17}$$

dan

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} - i\hat{p}) \tag{18}$$

maka persamaan sebelumnya menjadi $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}\right)$ dengan nilai relasi komutasi operator $\hat{a}$ dan $\hat{a}^\dagger$ adalah

$$\left[\hat{a}\hat{a}^\dagger\right] = 1 \tag{19}$$

(Sakurai, 1994). Kemudian ditinjau kembali persamaan (17) dan (18) untuk mencari bentuk persamaan $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, sehingga diperoleh:

$$\hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2 - \hbar\omega) \tag{20}$$

kemudian bandingkan persamaan tersebut dengan persamaan (15)

$$\hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2 - \hbar\omega)$$

$$\frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2) - \frac{1}{2}\hbar\omega = \hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega$$

maka

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) \tag{21}$$

di mana nilai $\hat{N}$ adalah jumlah partikel yang diidentifikasikan dengan $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ $(\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger\hat{a})$. Selanjutnya ditinjau kembali persamaan (17) dan (18) untuk menentukan ekspresi dari operator medan listrik dengan menjumlahkan operator $\hat{a}$ dan $\hat{a}^\dagger$:

$$\hat{a} + \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} + i\hat{p}) + \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} - i\hat{p})$$

sehingga akan diperoleh:

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right). \tag{22}$$

Dalam hal ini, medan elektromagnetik termasuk medan listrik dapat diungkapkan dalam istilah operator kuantum, dan salah satu metode yang bisa diterapkan untuk menggambarkan medan listrik dalam konteks ini adalah dengan melibatkan operator kreasi dan anihilasi dari mode medan elektromagentik. Dengan demikian, selanjutnya adalah mensubstitusikan nilai evolusi waktu dari operator $\hat{a}$ dan $\hat{a}^\dagger$ pada persamaan (9) dan (10) ke dalam persamaan (22) untuk memperoleh nilai dari medan listrik $\hat{q}(t)$ yang memuat evolusi waktu dari operator kreasi dan anihilasi:

$$\hat{q}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right). \qquad (23)$$

Selanjutnya gunakan persamaan (23) untuk disubstitusikan ke dalam persamaan (107) untuk memperoleh representasi medan listrik $E_x(z,t)$ dalam konteks elektromagnetik kuantum:

$$\hat{E}_x(z,t) = \sqrt{\frac{2}{V\epsilon_0}}\,\omega q(t)\sin\,kz$$

$$\hat{E}_x(z,t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}}\left(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right)\sin\,kz$$

$$\hat{E}_x(z,t) = \varepsilon_0\big(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\big)\sin\,kz, \qquad (24)$$

dengan $\varepsilon_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}}$. Persamaan (24) adalah persamaan medan listrik yang akan digunakan untuk menghitung nilai harap $\hat{E}_x$ dalm keadaan foton $|n\rangle$:

$$\langle n|\hat{E}_x(z,t)|n\rangle = \varepsilon_0\big(\langle n|\hat{a}e^{-i\omega t}|n\rangle + \langle n|\hat{a}^\dagger e^{i\omega t}|n\rangle\big)\sin\,kz$$

$$\langle n|\hat{E}_x(z,t)|n\rangle = \varepsilon_0\big(\langle n|\hat{a}|n\rangle e^{-i\omega t} + \langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle e^{i\omega t}\big)\sin\,kz.$$

Gunakan sifat-sifat oeprator $\hat{a}$ dan $\hat{a}^\dagger$ terhadap keadaan $|n\rangle$, di mana operator $\hat{a}$ dan $\hat{a}^\dagger$ yang bekerja pada fungsi keadaan foton seperti pada osilator harmonik kuantum dinyatakan dengan $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ dan $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$, sehingga akan diperoleh

$$\langle n|\hat{E}_x(z,t)|n\rangle = \varepsilon_0\big(\sqrt{n}\langle n|n-1\rangle e^{-i\omega t} + \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle e^{i\omega t}\big)\sin kz.$$

Bra dan ket mewakili keadaan sistem yang orthogonal dalam ruang vektor kuantum sehingga dapat dituliskan $\langle n|\hat{a}|n\rangle = 0$ dan $\langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle = 0$, sehingga penjabaran sebelumnya menjadi:

$$\langle n|\hat{E}_x(z,t)|n\rangle = \varepsilon_0\big(0e^{-i\omega t} + 0e^{i\omega t}\big)\sin kz = 0$$

sehingga

$$\langle n|\hat{E}_x(z,t)|n\rangle = \varepsilon_0\big(\langle n|\hat{a}|n\rangle e^{-i\omega t} + \langle n|\hat{a}^\dagger e^{i\omega t}|n\rangle\big)\sin\,kz = 0. \qquad (25)$$

Hasil tersebut adalah nol (0) berarti bahwa nilai harap medan listrik dalam kedaaan kuantum n pada waktu t dan posisi z tertentu adalah nol. Dengan demikian, yang dipertimbangkan adalah nilai harap dalam keadaan koheren $|\alpha\rangle$, sehingga persamaan (25) menjadi

$$\langle\alpha|\hat{E}_x(z,t)|\alpha\rangle = \varepsilon_0\big(\langle\alpha|\hat{a}|\alpha\rangle e^{-i\omega t} + \langle\alpha|\hat{a}^\dagger e^{i\omega t}|\alpha\rangle\big)\sin\,kz. \qquad (26)$$

Diberikan bentuk aksi operator anihilasi $\hat{a}$ pada keadaan koheren $|\alpha\rangle$, yaitu $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (20), sehingga persamaannya menjadi $\langle\alpha|\hat{E}_x(z,t)|\alpha\rangle = \varepsilon_0\big(\alpha\langle\alpha|\alpha\rangle e^{-i\omega t} + \langle\alpha|\hat{a}^\dagger e^{i\omega t}|\alpha\rangle\big)\sin kz$.

Dalam konteks ini, $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ dan $\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = (\alpha^*)^*|\alpha\rangle = \alpha^*|\alpha\rangle$, sehingga dengan mensubstitusikan kedua ekspresi tersebut ke dalam persamaan sebelumnya, maka akan didapatkan:

$$\langle\alpha|\hat{E}_x(z,t)|\alpha\rangle = \varepsilon_0\big(\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}\big)\sin kz. \qquad (27)$$

Jika ditetapkan $\alpha = |\alpha|e^{i\theta} \Rightarrow \alpha^* = |\alpha|e^{-i\theta}$, maka jika disubstitusikan α dan α^* ke dalam persamaan (27), maka akan diperoleh $\langle\alpha|\hat{E}_x(z,t)|\alpha\rangle = \varepsilon_0\big(|\alpha|e^{i(\theta-\omega t)} + |\alpha|e^{-i(\theta-\omega t)}\big)\sin kz$.

Gunakan identitas Euler, $e^{ix} = \cos x + \sin x$, maka

$$\langle\alpha|\hat{E}_x(z,t)|\alpha\rangle = 2\varepsilon_0|\alpha|\cos(\theta-\omega t)\sin kz$$

di mana $\cos(\theta-\omega t)$ adlaah bagian real dari $\alpha e^{-i\omega t}$, maka akan diperoleh persamaan akhir

$$\langle\alpha|\hat{E}_x(z,t)|\alpha\rangle = 2|\alpha|\varepsilon_0 Re\big(\alpha e^{-i\omega t}\big)\sin kz = 2\varepsilon_0|\alpha|\cos(\theta-\omega t)\sin kz \qquad (28)$$

yang menyatakan bahwa nilai harapan medna listrik klaisk dalam keadaan koheren $|\alpha\rangle$ adalah proposional terhadap $|\alpha|\cos(\theta-\omega t)\sin kz$ dan persamaan tersebut juga menggambarkan gambaran tentang sifat-sifat fisis medan listrik yang diharapkan dalam keadaan koheren tertentu.

Analisis Perturbasi Hamiltonian dari Osilator Harmonik Kuantum

Diberikan perturbasi linear dengan menambahkan suku perturbasi pada bagian potensial dari Hamiltonian asli, yaitu $G = \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}-\alpha)$. Ketika terjadi pergeseran sebesar α, maka Hamiltonian menjadi $H_\alpha = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x-\alpha)^2$, dengan mengingat bahwa dalam mekanika kuantum, variable-variable klasik seperti posisi x

dna momentum p didgantikan oleh operator-operator yang sesuai, yaitu operator posisi $\hat{x}$ dan operator momentum $\hat{p}$, sehingga Hamiltoniannya menjadi:

$$\hat{H}_\alpha = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (\hat{x} - \alpha)^2. \tag{29}$$

Persamaan tersebut adalah persamaan Hamiltonian dengan terjadinya perturbasi linear $\hat{H}_\alpha$ yang merepresentasikan sistem partikel dalam potensial osilator harmonik yang mengalami pergeseran.

Diberikan definisi baru untuk Hamiltonian terperturbasi yang bergeser ke arah posisi dengan menuliskan operator posisi baru $\hat{x}_\alpha$ dalam posisi asli $\hat{x}$ dan perturbasi α, yaitu $\hat{x}_\alpha = \hat{x} - \alpha$, sehingga

$$\hat{H}_\alpha = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}_\alpha^2. \tag{30}$$

Gunakan operator kreasi dan anihilasi untuk memahami sifat-sifat kuantum dari sistem yang dijelaskan oleh Hamiltonian terperturbasi dengan mendefinisikan operator baru untuk kedua susku pada ruas kanan persamaan (300, yaitu $\hat{A}^2 \equiv \frac{m\omega^2 \hat{x}_\alpha^2}{2}$ dan $\hat{B}^2 = \frac{\hat{p}^2}{2\,m}$, sehingga $\hat{H}_\alpha = \hat{A}^2 + \hat{B}^2$, di mana $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ tidak komutatif sehingga untuk mencari relasi komutasi dari kedua operator tersebut maka digunakan beberapa langkah aljabar, maka akan diperoleh :

$$\hat{H}_\alpha = (\hat{A} + i\hat{B})(\hat{A} - i\hat{B}) - i[\hat{B}, \hat{A}]$$

di mana $[\hat{B}, \hat{A}] = -\frac{\omega i \hbar}{2}$. Kemudian lakukan beberapa operasi aljabar dan manipulasi matematis, akan diperoleh operator kreasi dan anihlasi baru:

$$\hat{a}_\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x}_\alpha + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \tag{31}$$

dan

$$\hat{a}_\alpha^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x}_\alpha - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \tag{32}$$

dengan relasi komutasi $\hat{a}_\alpha$ dan $\hat{a}_\alpha^\dagger$, yaitu:

$$[\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\alpha^\dagger] = 1. \tag{33}$$

Kedua operator baru tersebut dapat juga dinyatakan dalam kombinasi linear dari operator kreasi anihilasi lama dengan mengganti $\hat{x}_\alpha$ pada persamaan (31) dan (32) dengan $\hat{x} - \alpha$, sehingga diperoleh:

$$\hat{a}_\alpha = \hat{a} - \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \alpha \tag{34}$$

dan

$$\hat{a}_\alpha^\dagger = \hat{a}^\dagger - \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \alpha. \tag{35}$$

Dalam konteks teori perturbasi osilator harmonik kuantum, adanya operator kreasi dan anihilasi dapat digunakan untuk memperkenalkan keadaan dasar terperturbasi $|0_\alpha\rangle$ yang memenuhi kondisi :

$$\hat{a}_\alpha |0_\alpha\rangle = 0 \tag{36}$$

Kemudain susbtitusikan nilai $\hat{a}_\alpha$ pada persamaan (34) ke dalam persamaan (36), sehingga $\left(\hat{a} - \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \alpha\right) |0_\alpha\rangle = 0$, kemudian nilai $-\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \alpha$ dipindahkan ke ruas kanan, sehingga

$$\hat{a} |0_\alpha\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \alpha |0_\alpha\rangle. \tag{37}$$

Jika didefinisikan $\alpha \to \alpha \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}$, maka persamaan (37) menjadi:

$$\hat{a} |0_\alpha\rangle = \alpha |0_\alpha\rangle, \tag{38}$$

di mana persamaan tersebut persis dengan persamaan yang diperoleh untuk kedaan koheren $|\alpha\rangle$ pada persamaan (13), namun keadaan yang dibahas dalam pembahasan ini adalah keadaan yang telah terperturbasi oleh parameter pergeseran α, maka persamaan (13) menjadi $\hat{a}_\alpha |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$, kemudian mengambil nilai mutlak di kedua sisi persamaan, sehingga akan diperoleh $|\hat{a}_\alpha |\alpha\rangle| = |\alpha |\alpha\rangle|$. Namun, $|\hat{a}_\alpha |\alpha\rangle|$ adalah panjang vektor $\hat{a}_\alpha |\alpha\rangle$ yang tidak mungkin nol karena $\hat{a}_\alpha |\alpha\rangle$ tidak sama dengan nol. Dengan demikian, disimpulkan bahwa $|0_\alpha\rangle \neq 0$, dan $|0_\alpha\rangle$ serta $|\alpha\rangle$ tidak ortogonal. Oleh sebab itu, harus dimiliki persamaan

$$|0_\alpha\rangle = c |\alpha\rangle \tag{39}$$

di mana persamaan tersebut mencerminkan bagaimana keadaan dasar dari sistem osialtor harmonik dapat berubah ketika mendapat perturbasi dan dengan menggunkan konstanta kompleks c.

Jika α diberikan oleh $\alpha \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}$, maka susbtitusikan nilai tersebut ke dalam persamaan (29) untuk memperoleh ekspresi Hamiltonian dari osialtor harmonik kuantum terperturbasi pada posisi $\hat{x}$:

$$\hat{H}_\alpha = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\hat{x} - \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \alpha \right)^2. \tag{40}$$

Dengan demikian, telah diperoleh Hamiltonian yang keadaan dasarnya adalah keadaan koheren dari *eigenstate* osilator harmonik terperturbasi yang kemudian akan digunakan untuk membuat pendekatan baru terhadap teori medan elektromagentik. Dan dengan melakukan beberapa penjabaran pada persamaan tersebut, maka akan diperoleh evolusi waktu dari operator kreasi baru dan operator anihilasi baru yang serupa dengan persamaan (9) dan (10), yaitu:

$$\hat{a}_\alpha(t) = \hat{a}_\alpha e^{-i\omega t} \tag{41}$$
dan
$$\hat{a}_\alpha^\dagger(t) = \hat{a}_\alpha^\dagger e^{i\omega t}. \tag{42}$$

Analisis Nilai Harap Medan Listrik dalam Keadaan Tereksitasi Pertama dari Hamiltonian $\hat{H}_\alpha$

Persamaan Hamiltonian dari osilator harmonik terperturbasi dapat diambil sebagai Hamiltonian baru untuk medna elektromagentik dengan menetapkan massa partikelnya $m = 1$, sehingga:

$$\hat{H}_\alpha = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2\left(\hat{x} - \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\alpha\right)^2. \tag{43}$$

Posisi $\hat{x}$ pada osilator harmonik kuantum mirip dengan operator medan listrik $\hat{q}$ pada medan eletkromagnetik $(\hat{x} \equiv \hat{q})$ dan operator momentum $\hat{p}$ pada osialtor harmonik mirip dengan operator medan magnetik $\hat{p}$, sehingga:

$$\hat{H}_\alpha = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2\left(\hat{q} - \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\alpha\right)^2. \tag{44}$$

Jika ditetapkan nilai dari operator medan listrik dan medan magnetik yang teperturbasi berturut-turut adalah $\hat{q}_\alpha = \hat{q} - \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\alpha$ dan $\hat{p} = \hat{p}_\alpha$, median susbtitusikan kedua ekspresi tersebut ke dalam persamaan (44):

$$\hat{H}_\alpha = \frac{\hat{p}_\alpha^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2\hat{q}_\alpha^2. \tag{45}$$

Substitusikan persamaan (23) ke dalam persamaan (24) kemudian lakukan manipulasi matematis dengan menambahkan $\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}$ di ruas kanan persamaan (24):

$$\hat{E}_x(z,t) = \varepsilon_0\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right)\sin\, kz$$

Sehingga diperoleh definisi untuk persamaan operator medan listrik $\hat{E}_x(z,t)$, yaitu

$$\hat{E}_x(z,t) = \varepsilon_0\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}\hat{q}(t)\sin kz. \tag{46}$$

Gunakan transformasi uniter yang diberikan oleh $\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t,0)(\hat{A}_S)\hat{U}(t,0)$, di mana nilai $\hat{A}$ di sini adalah operator umum (operator sembarang) dalam mekanika kuantum yang bisa digantikan dengan operator observable apa pun. Dengan demikian, untuk mencari evolusi waktu dari operator $\hat{q}$, maka transformasi uniternya adalah $\hat{q}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t,0)(\hat{q}_S)\hat{U}(t,0)$, di mana $\hat{U}^\dagger(t,0)\hat{U}(t,0) = 1\!\!1$ yang adalah operator identitas.

Opertor $\hat{q}$ dianggap konstan karena mewakili operator Schrödinger yang turunan parsialnya sama dengan 0, maka diberikan persamaan:

$$i\hbar\frac{d\hat{q}_H}{dt} = [\hat{q}_H, \hat{H}_H]. \tag{47}$$

Dalam hal ini, Hamiltonian dan operator kuantum lainnya telah ditransformasikan ke dalam koordinat α, maka evolusi waktu untuk operator $\hat{q}_\alpha$ dapat ditulis seperti pada persamaan (122), yaitu :

$$\hat{q}_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\hat{a}_\alpha\, e^{-i\omega t} + \hat{a}_\alpha^\dagger e^{i\omega t}\right). \tag{48}$$

Operator kreasi baru dan operator anihilasi baru yang telah diperoleh sebelumnya disubstitusikan nilai α ke dalamnya, maka akan diperoleh:

$$\hat{a}_\alpha = \hat{a} - \alpha \tag{49}$$
dan
$$\hat{a}_\alpha^\dagger = \hat{a}^\dagger - \alpha. \tag{50}$$

Kemudian kedua persamaan tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (48):

$$\hat{q}_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left((\hat{a} - \alpha)\, e^{-i\omega t} + (\hat{a}^\dagger - \alpha)e^{i\omega t}\right). \tag{51}$$

sehingga

$$\hat{q}_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} - \alpha\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right)\right). \tag{52}$$

Persamaan tersebut adalah persamaan evolusi waktu dari operator $\hat{q}_\alpha(t)$ pada medan elektromagnetik kuantum yang dipengaruhi oleh parameter perturbasi α.

Kemudian untuk mencari evolusi waktu operator $\hat{q}(t)$ dalam α dengan $t_0 = 0$, maka:

$$\hat{q}_\alpha(t) = \hat{U}^\dagger(t,0)\,(\hat{q}_\alpha)\,\hat{U}(t,0). \tag{53}$$

Substitusikan nilai dari $\hat{q}_\alpha$ yang telah ditetapkan sebelumnya, yaitu $\hat{q}_\alpha = \hat{q} - \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\alpha$ ke dalam persamaan (152):

$$\hat{q}_\alpha(t) = \hat{U}^\dagger(t,0)\,(\hat{q}_\alpha)\,\hat{U}(t,0) \tag{54}$$

$$\hat{q}_\alpha(t) = \hat{U}^\dagger(t,0)\left(\hat{q} - \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\alpha\right)\hat{U}(t,0) \tag{55}$$

$$\hat{q}_\alpha(t) = \hat{U}^\dagger(t,0)\,(\hat{q})\,\hat{U}(t,0) - \hat{U}^\dagger(t,0)\left(\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\alpha\right)\hat{U}(t,0) \tag{56}$$

$$\hat{q}_\alpha(t) = \left(\hat{q} - \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\alpha\right)\hat{U}^\dagger(t,0)\hat{U}(t,0). \tag{57}$$

dengan $\hat{U}^\dagger(t,0)\hat{U}(t,0) = 1\!\!1$ yang adalah operator identitas, maka

$$\hat{q}_\alpha(t) = \left(\hat{q} - \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\alpha\right), \tag{58}$$

di mana persamaan tersebut adalah bentuk dari operator $\hat{q}$ yang terperturbasi dengan tambahan $\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\alpha$. Karena α adalah konstanta kompleks, maka dengan menempatkannya ke dalam persamaan (52), maka akan diperoleh ekspresi yang sama yaitu:

$$\hat{q}_\alpha(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} - \alpha\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right)\right) \tag{59}$$

$$\hat{q}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} - \alpha\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right) + 2\alpha\right) \tag{60}$$

Dengan demikian, telah diperoleh persamaan evolusi waktu dari operator $\hat{q}$. Akan tetapi, persamaan yang diperoleh tersebut cukup berbeda dengan persamaan yang diperoleh pada pembahasan sebelumnya, yaitu pada persamaan (23) yang disebabkan oleh perubahan dalam Hamiltonian. Di sini, jika Hamiltonian berubah, maka relasi komutasi antaroperatornya juga berubah, sehingga perlu untuk dicari evolusi waktu baru untuk $\hat{q}$ dengan menghitung nilai harapan operator medan listrik dalam keadaan koheren yang pada dasarnya adalah keadaan dasar dari Hamiltonian tersebut.Sehingga berdasarkan persamaan (60), maka medan listrik dapat ditulis sebagai berikut:

$$\hat{E}_x(z,t) = \varepsilon_0\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}\hat{q}(t)\sin kz$$

$$\hat{E}_x(z,t) = \varepsilon_0\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} - \alpha\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right) + 2\alpha\right)\sin kz$$

sehingga:

$$\hat{E}_x(z,t) = \varepsilon_0\left(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} - \alpha\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right) + 2\alpha\right)\sin kz. \tag{61}$$

Persamaan tersebut merepresentasikan evolusi waktu medan elektromagnetik dalam ruang dan waktu dengan mempertimbangkan osilasi dan juga kontribusi tambahan dari konstanta kompleks α, di mana nilai harapan untuk medan listrik $\hat{E}_x(z,t)$ dalam keadaan koheren, dengan catatan bahwa, $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, $\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = \alpha^*|\alpha\rangle$, dan nilai dari $\langle\alpha|\alpha\rangle$ adalah hasil skalarnya sendiri, sehingga $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, maka persamaannya adalah:

$$\langle\alpha|\hat{E}_x(z,t)|\alpha\rangle = \varepsilon_0\left((\alpha^* - \alpha)e^{i\omega t} + 2\alpha\right)\sin kz \tag{62}$$

yang merepresentasikan nilai harapan dari medan listrik dalam keadaan koheren $|\alpha\rangle$. Jika nilai dari konstanta kompleks diberikan oleh $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, maka nilai tersebut dapat substitusikan ke dalam persamaan (62), sehingga diperoleh:

$$\langle\alpha|\hat{E}_x(z,t)|\alpha\rangle = \varepsilon_0\left(2\alpha - 2i|\alpha|\sin\theta\, e^{i\omega t}\right)\sin kz \tag{63}$$

$$\langle\alpha|\hat{E}_x(z,t)|\alpha\rangle = \varepsilon_0\left(2|\alpha|e^{i\theta} - 2i|\alpha|\sin\theta\, e^{i\omega t}\right)\sin kz$$

$$\langle\alpha|\hat{E}_x(z,t)|\alpha\rangle = \varepsilon_0\left(2|\alpha|\left(e^{i\theta} - i\sin\theta\, e^{i\omega t}\right)\right)\sin kz$$

kemudian menggunakan identitas euler $e^{ix} = \cos x + \sin x$ pada persamaan tersebut, sehingga:

$$\langle\alpha|\hat{E}_x(z,t)|\alpha\rangle = \varepsilon_0\left(2|\alpha|\cos\theta + 2|\alpha|\sin\theta - 2i|\alpha|\sin\theta\, e^{i\omega t}\right)\sin kz. \tag{64}$$

Dalam fisika kuantum, hasil ukur harus real, sehingga nilai harapan yang diperoleh pada pembahasan tersebut seharusnya bisa merepresentasikan nilai harapan pada medan listrik klasik pada persamaan (26). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa telah dilakukan analisis untuk dua kasus yang berbeda, yaitu yang pertama, eigenstate membuat medan listrik menjadi nol dan yang kedua, yaitu eigenstate memberikan ungkapan yang kompleks untuk medan listrik, sehingga satu-satunya kasus yang dapat digunakan untuk memperoleh ekspresi yang benar dalam perhitungan medan listrik adalah ketika menggunakan keadaan koheren $|\alpha\rangle$ daripada eigenstate. Oleh karena itu, perlu untuk menemukan pendekatan yang berbeda agar dapat menjelaskan mengapa keadaan koheren dapat memberikan hasil yang akurat untuk medan listrik.

Dari beberapa analisis sebelumnya, perhitungan terhadap operator medan listrik hanya memproduksi hasil klasik ketika digunakan keadaan koheren dalam kasus osialtor harmonik non-perturbasi, sehingga disimpulkan bahwa terdapat suatu transisi Hamiltonian ketika medan listrik itu diamati, yaitu osialtor harmonik non-perturbasi (asli) untuk medan elektromagentik yang berubah menjadi osialtor harmonik terperturbasi dengan $\hat{q}$ yang bergeser oleh kontanta kompleks α dengan $\alpha \rightarrow \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\alpha$. Sehingga secara matematis, Hamiltonian yang mengalami transisi diberikan oleh $\hat{H}_\alpha \rightarrow \hat{H}$, di mana $\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\,\hat{q}^2)$ dan $\hat{H}_\alpha = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2}\left(\hat{q}^2 - \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\alpha\right)$.

Karena transisi Hamiltonian tersebut, maka evolusi waktu operator $\hat{q}$ akan terjadi sesuai dengan Hamiltonian $\hat{H}$ dan bukan $\hat{H}_\alpha$. Dengan demikian, persamaan yang dimiliki adalah persamaan yang sama dengan persamaan (23), yaitu $\hat{q}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right)$.

Oleh karena keadaan koheren $|\alpha\rangle$ adalah dasar dari $\hat{H}_\alpha$, maka keadaan koheren tersebut juga yang akan digunakan untuk mengetahui nilai harap dari $\hat{q}(t)$, dengan mengingat bahwa $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$; $\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = \alpha^*|\alpha\rangle$; dan nilai dari $\langle\alpha|\alpha\rangle$ adalah hasil skalarnya sendiri, sehingga $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$, maka diperoleh

$$\langle\alpha|\hat{E}_x(z,t)|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{q}(t)|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}\right) \quad (65)$$

Yang merepresentasikan nilai harapan dari operator $\hat{q}(t)$ dalam keadaan koheren $|\alpha\rangle$, di mana α^* adalah konjugat kompleks dari α, sehingga diperoleh medan listrik, yaitu $\hat{E}_x(z,t) = 2|\alpha|\varepsilon_0 cos(\omega t - \theta)\sin kz$. Dengan demikian, telah diperoleh kembali persamaan klasik sebagaimana dalam persamaan (23).

Di sini persaman tersebut belum bisa menjadi bukti yang cukup untuk menjelaskan bahwa terjadi transisi $\hat{H}_\alpha \rightarrow \hat{H}$. Sehingga perlu untuk menghitung nilai harapan dari medan listrik dalam eigenstate energi lain dari Hamiltonian terpertubasi $\hat{H}_\alpha$. Kemudian merepresentasikan eigenstate ke-n dari Hamiltonian $\hat{H}_\alpha$ sebagai $|\alpha_n\rangle$ yaitu $|\alpha_1\rangle$ yang merepresentasikan keadaan tereksitasi pertama, $|\alpha_2\rangle$ merepresentasikan keadaan tereksitasi kedua, dan seterusnya. Namun di sini, keadaan dasar akan diwakili oleh $|\alpha\rangle$, untuk itu akan dilakukan perhitungan nilai harapan dari medan listrik pada keadaan tereksitasi pertama dari Hamiltonian terperturbasi $\hat{H}_\alpha$. Keadaan tereksitasi pertama $(|\alpha_1\rangle)$ diberikan oleh:

$$|\alpha_1\rangle = \hat{a}_\alpha^\dagger|\alpha\rangle. \quad (66)$$

Dengan demikian, persamaan (66) menyatakan bahwa keadaan tereksitasi pertama $|\alpha_1\rangle$ dapat dihasilkan dengan mengoperasikan operator kreasi $\hat{a}_\alpha^\dagger$ pada keadaan dasar $|\alpha\rangle$. Langkah selanjutnya adalah menghitung nilai harapan dari operator $\hat{q}$ pada keadaan tereksitasi pertama $|\alpha_1\rangle$, yang diberikan oleh:

$$\begin{aligned}\langle\alpha_1|\hat{q}|\alpha_1\rangle &= \langle\hat{a}_\alpha^\dagger\alpha|\hat{q}|\hat{a}_\alpha^\dagger\alpha\rangle \\ &= \langle\alpha|\hat{a}_\alpha(\hat{q})\hat{a}_\alpha^\dagger|\alpha\rangle.\end{aligned} \quad (67)$$

Selanjutnya tinjau kembali persamaan medan listrik klasik pada persamaan (24) di mana $\hat{E}_x(z,t) = \varepsilon_0\left(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right)\sin kz$ untuk menentukan nilai harap persamaan tersebut dalam keadaan tereksitasi pertama. Persamaan nilai harap untuk keadaan tereksitasi pertama diberikan oleh:

$$\langle\alpha_1|\hat{E}_x(z,t)|\alpha_1\rangle. \quad (68)$$

Langkah selanjutnya adalah, lihat kembali persamaan (24) untuk menentukan keadaan tereksitasi pertama dari ekspresi tersebut, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}&\langle\alpha_1|E_x(z,t)|\alpha_1\rangle \\ &= \varepsilon_0\left(\langle\alpha|\hat{a}_\alpha\hat{a}\hat{a}_\alpha^\dagger|\alpha\rangle e^{-i\omega t} \right. \\ &\left.+ \langle\alpha|\hat{a}_\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}_\alpha^\dagger|\alpha\rangle e^{i\omega t}\right)\sin kz\end{aligned} \quad (69)$$

di mana persamaan tersebut memberikan gambaran tentang bagaimana nilai harapan dari medan listrik dalam keadaan tereksitasi pertama dapat diekspresikan sebagai kombinasi dari kontribusi operator kreasi dan anihilasi partikel pada keadaan dasar $|\alpha\rangle$. Selanjutnya adalah menghitung nilai harapan dari masing-masing suku di sisi kanan persamaan (168), yaitu $\alpha|\hat{a}_\alpha\hat{a}\hat{a}_\alpha^\dagger|\alpha\rangle$ dan $\langle\alpha|\hat{a}_\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}_\alpha^\dagger|\alpha\rangle$, sehingga akan diperoleh

$$\begin{aligned}&\langle\alpha|\hat{a}_\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}_\alpha^\dagger|\alpha\rangle \\ &= \langle\alpha|\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle - \alpha^*\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle \\ &- \alpha\langle\alpha|\hat{a}\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle + |\alpha|^2\langle\alpha|\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle \\ &= (2\alpha^* + \alpha^*|\alpha|^2) - \alpha^*(\alpha^{*2}) \\ &- \alpha(1+|\alpha|^2) + \alpha^*|\alpha|^2 \\ &= 2\alpha^*(1+|\alpha|^2) - \alpha^{*3} \\ &- \alpha(1+|\alpha|^2).\end{aligned} \quad (70)$$

Dengan demikian, dapat dihitung nilai dari $\alpha|\hat{a}_\alpha\hat{a}^\dagger\hat{a}_\alpha^\dagger|\alpha$. Namun dalam hal ini, ada cara lain yang lebih singkat untuk menghitung persamaan tersebut yaitu dengan menggunakan sifat dari operasi konjugat Hermitian, yaitu $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, sehingga dapat dituliskan bahwa $\left(\hat{a}_\alpha\hat{a}\hat{a}_\alpha^\dagger\right)^\dagger =$

$\left(\hat{a}_\alpha^\dagger(\hat{a}\hat{a}_\alpha)\right)^\dagger = \left(\hat{a}_\alpha^\dagger\right)^\dagger (\hat{a}\hat{a}_\alpha)^\dagger = \hat{a}_\alpha\, \hat{a}^\dagger \hat{a}_\alpha^\dagger$, di mana $\left(\hat{a}_\alpha^\dagger\right)^\dagger = \hat{a}_\alpha$. Dengan demikian, dapat dinyatakan bahwa $\langle\alpha|\hat{a}_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a}_\alpha^\dagger|\alpha\rangle$ adalah kompleks konjugat dari $\langle\alpha|\hat{a}_\alpha \hat{a}\hat{a}_\alpha^\dagger|\alpha\rangle$. Sehingga

$$\langle\alpha|\hat{a}_\alpha \hat{a}\hat{a}_\alpha^\dagger|\alpha\rangle = 2\alpha(1+|\alpha|^2) - \alpha^3 - \alpha^*(1+|\alpha|^2). \qquad (71)$$

Selanjutnya, tinjau kembali persamaan nilai harap medan listrik pada persamaan (168), kemudian substitusikan persamaan (175) dan (174) ke dalam persamaan (168) dengan $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, $\alpha^* = |\alpha|e^{-i\theta}$, dan identitas euler di mana $e^{ix} = \cos x + \sin x$, maka diperoleh persamaan:

$$\langle\alpha_1|E_x(z,t)|\alpha_1\rangle = \varepsilon_0(4|\alpha|(1+|\alpha|^2)\cos(\omega t-\theta) - 2|\alpha|^3\cos(\omega t - 3\theta) + 2\,|\alpha|(1+|\alpha|^2)\cos(\omega t+\theta))\sin kz. \qquad (72)$$

Dengan demikian telah dihitung nilai harapan untuk operator medan listrik dalam keadaan tereksitasi pertama $|\alpha_1\rangle$ dari Hamiltonian terperturbasi $\widehat{H}_\alpha$.

Kemudian dengan menggunakan cara yang serupa, dapat dihitung nilai harapan dari medan listrik di bawah keadaan tereksitasi kedua $|\alpha_2\rangle$, ketiga $|\alpha_3\rangle$, atau ke-n dari Hamiltonian terperturbasi. Namun, karena dalam perhitungannya sangat rumit dan memakan waktu, maka diberikan pola sebagai solusi-solusi persamaan berikutnya. Sehingga untuk memperoleh bentuk matematis dari nilai harapan medan listrik pada keadaan tereksitasi kedua dalam konteks Hamiltonian terperturbasi, maka persamaannya diberikan oleh:

$$\langle\alpha_2|\hat{E}_x(z,t)|\alpha_2\rangle = \left(E_0\cos(\omega t-5\theta) + E_1\cos(\omega t-3\theta) + E_2\cos(\omega t-\theta) + E_3\cos(\omega t+\theta) + E_4 cos(\omega t+3\theta)\right), \qquad (73)$$

di mana E_0, E_1, E_2, E_3, dan E_4 mewakili amplitudo medan listrik yang terkait dengan masing-masing komponen, di mana komponen-komponen tersebut bergetar pada frekuensi angular ω dengan fase θ yang berbeda, seperti $(\omega t-5\theta), (\omega t-3\theta), (\omega t-\theta), (\omega t+\theta)$ dan $(\omega t+3\theta)$.

Perhitungan nilai harapan untuk keadaan lain dari osilator harmonik terganggu sangat-sangat ketat, namun dapat diturunkan sebuah persamaan umum untuk nilai harapan medan listrik dalam *eigenstate* ke-n. Berdasarkan pola persamaan (73), maka dapat digeneralisasikan hasil tersebut untuk nilai harapan medan listrik dalam *eigenstate* ke-n dari osialtor yang terperturbasi. Dengan demikian, nilai harapan medan listrik dalam *eigenstate* ke-n dapat diungkapkan sebagai:

$$\langle\alpha_n|\hat{E}_x(z,t)|\alpha_n\rangle = \sum_{r=0}^{2n} E_r\cos(\omega t - (2n+1-2r)\theta). \qquad (74)$$

KESIMPULAN DAN SARAN

Terdapat transisi Hamiltonian medan elektromagnetik ketika medan listrik diamati yaitu osilator non-perturbasi yang berubah menjadi osilator terperturbasi. Perubahan Hamiltonian ini dapat diinterpretasikan sebagai perubahan dalam ruang, di mana $\hat{q}$ bergeser oleh suatu konstanta kompleks $\alpha \to \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\alpha$. Dalam keadaan eksitasi ke-n, medan listrik adalah superposisi dari $2n+1$ gelombang listrik dasar dengan perbedaan fase 2θ. diharapkan bagi peneliti selanjutnya untuk dapat menggunakan teori perturbasi pada osilator harmonik kuantum dan mencari efeknya terhadap teori elektrodinamika kuantum yang lainnya

DAFTAR PUSTAKA

Aryani, N. P., Lalus, H. F., Wahyuni, S., Ratnasari, F. D., & Akhlis, I. (2021). *Hamiltonian matrix representation of harmonic oscillator system with Linear-Cubic-Quartic (LCQ) perturbation*. 0–7. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1918/2/022024

Bohr, E. A., Ransford, A., Campbell, W. C., & Hamilton, P. (2017). *Displacement operators : the classical face of their quantum phase*. 1–14.

Bowman, G. E. (2008). *Essential QUANTUM MECHANICS*. Oxford University Press.

CETINTAS, O. (2019). *ALGEBRAIC METHODS AND EXACT SOLUTIONS OF QUANTUM PARAMETRIC OSCILLATORS* (Issue June). Izmir Institute of Technology.

Desai, B. R. (2010). *Quantum Mechanics with Basic Field Theory*. United States of America by Cambridge University Press. https://www.ptonline.com/articles/how-to-get-better-mfi-results

Gangaraj, S. A. H., Hanson, G. W., & Monticone, F. (2024). *Dynamical Casimir Effects: The Need for Nonlocality in Time-Varying Dispersive Nanophotonics*. *1*, 1–6.

Glauber, R. J. (2014). *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*. *September 1963*.

https://doi.org/10.1103/PhysRev.131.2766

Griffiths, D. J. (2005). *Introduction to Quantum Mechanics* (Second Edi). Pearson Prentice Hall.

Griffiths, D. J., & Schroeter, D. F. (2018). *Introduction to Quantum Mechanics* (Third Edit). Cambridge University Press.

Jun, N. (2014). *Principles of Physics from Quantum Field Theory to Classical Mechanics* (Vol. 2). World Scientific Publishing.

Maya, R. (2014). *Persamaan Diferensial Biasa*.

Miller, D. A. B. (2007). *Quantum Mechanics for Scientists and Engineers*. Cambridge University Press.

Nolting, W. (2017). *Theoretical Physics 6 Quantum Mechanics-Basics*. Springer.

Nurlina, N. (2017). *Fisika kuantum* (Muh. Fakhruddin S (ed.); Issue April 2017). LPP Unismuh Makasssar.

Phillips, A. C. (2003). *Introduction to Quantum Mechanics* (1st ed.). Wiley.

Razavy, M. (2011). *Heisenberg's Quantum Mechanics*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd.

Sahu, S. (2019). *Perturbation of Quantum Harmonic Oscillator and its effect on Quantum Electromagnetic Field Theory*. https://arxiv.org/pdf/1901.09267.pdf

Sakurai, J. J. (1994). *Modern Quantum Mechanics* (San Fu Tuan (ed.); Revised Ed). Addison-Wesley Publishing Company.

Shankar, R. (1994). *Principles of Quantum Mechanics* (2nd ed). Springer.

Sudiarta, I. W. (2012). *Mekanika Kuantum(draft)*. Program Studi Fisika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Mataram.

Zettili, N. (2001). Quantum mechanics: Theory, analysis, and applications. In *Quantum Mechanics: Theory, Analysis, and Applications*.