MATHEMATICAL SCIENCES
AND APPLICATIONS JOURNAL

Volume 4, Number 2 | ISSN: 2986-4180
https://online-journal.unja.ac.id/msa
Article

Algoritma Arnoldi untuk Penyelesaian Masalah Nilai Eigen Matriks Raksasa

Khairul Alim[1]*, Nurul Pratiwi[2], Cut Multahadah[1], Corry Sormin[1], Fernando Mersa Putra[3]

[1]Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Univeversitas Jambi, Jambi, 36361, Indonesia
[2]Program Studi Kimia, Fakultas Sains dan Teknologi, Univeversitas Jambi, Jambi, 36361, Indonesia
[3]Program Studi Teknik Lingkungan, Fakultas Sains dan Teknologi, Univeversitas Jambi, Jambi, 36361, Indonesia

*Corresponding author e-mail: khairulalim@unja.ac.id

Article Info
Received April 2024
Accepted April 2024
Published April 2024

Keyword:
Large-scale matrice
Arnoldi algorithm
Hessenberg
Eigenvalue computation
Numerical method

Abstract

The computation of eigenvalues for large-scale matrices is a crucial task in various scientific and engineering domains. This research focuses on the performance of numerical techniques, particularly those utilizing Hessenberg matrices, in solving eigenvalue problems. We investigate the efficacy of these methods and their implementation on modern computational platforms. Our study reveals that increasing the size of the Hessenberg matrix significantly enhances the accuracy of eigenvalue approximations. Through extensive simulations and performance evaluations, we demonstrate that larger Hessenberg matrices provide more precise eigenvalue solutions, underscoring the importance of matrix dimension in the computational process. These findings offer valuable insights for optimizing eigenvalue computations in large-scale applications.

1. Pendahuluan

Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang memiliki peran penting dalam kehidupan sehari-hari. Berbagai permasalahan sehari-hari dapat diselesaikan dengan lebih mudah atau bahkan hanya dapat diselesaikan dengan bantuan model matematika. Selain itu, banyak disiplin ilmu lainnya sangat bergantung pada matematika untuk perkembangannya, seperti Fisika, Kimia, dan Ekonomi [1–3]. Matematika menuntut penggunanya untuk berpikir secara kritis, logis, dan terstruktur [4]. Dalam perkembangannya, ilmuwan membentuk pola dari suatu permasalahan ke dalam model matematika, sehingga pola-pola tersebut dapat diselesaikan dengan metode-metode yang telah dikembangkan sebelumnya.

Salah satu permasalahan yang sering muncul dalam berbagai penelitian adalah masalah nilai eigen [5]. Nilai eigen adalah konsep matematika dengan aplikasi luas dalam berbagai bidang, termasuk teknik, fisika, dan ilmu komputer. Misalnya, dalam analisis getaran, nilai eigen digunakan untuk menentukan frekuensi alami dari sistem mekanis. Dalam pengolahan citra, nilai eigen digunakan dalam metode analisis komponen utama (PCA) untuk pengurangan dimensi dan ekstraksi fitur. Nilai eigen juga memainkan peran penting dalam dinamika sistem, stabilitas struktur, dan banyak aplikasi lainnya yang memerlukan analisis matriks.

Berbagai metode telah dikembangkan untuk menyelesaikan masalah nilai eigen, baik secara analitik maupun numerik. Namun, dalam beberapa kasus, pencarian solusi secara analitik cukup sulit dilakukan, terutama pada permasalahan dengan matriks berukuran besar. Oleh karena itu, diperlukan metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah ini. Dengan perkembangan teknologi, banyak program komputer dikembangkan untuk membantu menyelesaikan permasalahan matematika [6]. Program-program ini menggunakan algoritma berdasarkan metode-metode yang telah ada, sehingga pengguna dapat menggunakan sintaks sederhana untuk

https://doi.org/10.22437/msa.v4i2.36182

menyelesaikan berbagai masalah matematika, termasuk masalah nilai eigen.

Penelitian terkini menunjukkan kemajuan signifikan dalam pengembangan metode numerik untuk menyelesaikan masalah nilai eigen. Salah satu metode yang banyak digunakan adalah Algoritma Arnoldi, yang dikenal karena kemampuannya dalam menyederhanakan masalah nilai eigen pada matriks jarang berukuran besar [7]. Algoritma Arnoldi merupakan bagian dari kelas metode iteratif yang dirancang untuk menghitung beberapa nilai eigen dan vektor eigen terbesar dari matriks jarang. Keunggulan utama algoritma ini adalah efisiensinya dalam menangani matriks berukuran besar yang jarang, yang sering ditemukan dalam aplikasi ilmiah dan teknik.

Algoritma Arnoldi bekerja dengan membangun basis ortonormal yang mencakup subruang Krylov, yang merupakan ruang yang dihasilkan oleh iterasi vektor awal melalui matriks yang diberikan. Proses ini menghasilkan matriks Hessenberg yang lebih kecil, yang nilai eigennya mendekati nilai eigen dari matriks asli. Keunggulan pendekatan ini adalah kemampuannya untuk mengurangi kompleksitas komputasi, memungkinkan solusi yang lebih cepat dan efisien untuk masalah dengan dimensi besar. Penelitian ini akan membahas tentang pengaruh nilai awal dan ukuran matriks Hessenberg terhadap pendekatan nilai eigen yang diperoleh.

Penggunaan Algoritma Arnoldi dalam konteks matriks jarang memberikan keuntungan signifikan dalam hal efisiensi memori dan kecepatan komputasi. Matriks jarang, yang sebagian besar elemennya adalah nol, memerlukan teknik penyimpanan khusus dan algoritma yang mampu memanfaatkan struktur jarang ini untuk mengurangi kebutuhan penyimpanan dan waktu komputasi. Dalam banyak kasus, Algoritma Arnoldi dapat mengurangi ukuran matriks yang harus diproses tanpa kehilangan informasi penting tentang struktur nilai eigennya.

Selain itu, Algoritma Arnoldi memiliki fleksibilitas dalam mengatasi berbagai ukuran dan tipe matriks jarang. Ini membuatnya sangat berguna dalam aplikasi dunia nyata di mana matriks yang dihasilkan dari data eksperimen atau simulasi seringkali sangat besar dan jarang. Fleksibilitas ini juga memungkinkan penyesuaian algoritma untuk mengatasi tantangan spesifik yang mungkin timbul dalam analisis matriks besar.

Secara keseluruhan, penelitian ini akan mengeksplorasi efisiensi dan efektivitas Algoritma Arnoldi dalam menyelesaikan masalah nilai eigen pada matriks jarang berukuran besar. Kami akan mengkaji berbagai faktor yang mempengaruhi kinerja algoritma ini, termasuk pilihan nilai awal dan ukuran matriks Hessenberg yang dihasilkan. Dengan demikian, penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi yang berarti dalam pemahaman dan penerapan metode numerik untuk analisis matriks jarang, serta membuka jalan bagi pengembangan algoritma yang lebih canggih dan efisien di masa depan.

2. Metode Penelitian

Algoritma Arnoldi bekerja pada subruang Krylov, yang merupakan konsep dasar dalam analisis matriks berukuran besar. Subruang Krylov adalah ruang vektor yang dibentuk oleh iterasi suatu vektor awal melalui matriks yang diberikan. Proses iterasi ini menghasilkan basis ortonormal yang digunakan untuk menyederhanakan masalah nilai eigen dari matriks asli.

Definisi

Diberikan matriks A berukuran $n \times n$. Matriks

$$K_m(A, v) := [v \quad Av \quad A^2v \quad \cdots \quad A^{m-1}v] \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

dibangun oleh vektor $v \in \mathbb{R}^n$ disebut matriks Krylov.

Kolom-kolom dari matriks Krylov membangun subruang, yaitu

$$\kappa_m(A, v) := span\{v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v\}$$

yang disebut subruang Krylov.

Kolom matriks Krylov memenuhi sifat polinomial monic yang dijelaskan menurut definisi berikut. Polinomial monic adalah polinomial yang koefisien terdepan (koefisien dari pangkat tertinggi) bernilai satu. Oleh karena itu, setiap kolom dalam matriks Krylov dapat direpresentasikan sebagai kombinasi linear dari iterasi matriks terhadap vektor awal, dimana kombinasi tersebut mengikuti aturan polinomial monic.

Definisi

Diberikan A adalah sebarang matiks berukuran $n \times n$. Polinomial minimal dari v adalah polinomial monic p dengan derajat terkecil sehingga $p(A)v = 0$.

Pemahaman yang mendalam tentang sifat-sifat subruang Krylov adalah kunci untuk mengembangkan algoritma yang lebih efektif dan efisien. Pada bagian ini, kami menyajikan dua proposisi penting yang menjelaskan sifat dasar dari subruang Krylov dan kondisi yang mempengaruhi dimensinya.

Proposisi

Subruang Krylov κ_m adalah subruang dari semua vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^n$ yang dapat ditulis sebagai $x = p(A)v$, dimana $p(A)$ adalah polinomial dengan pangkat tidak lebih dari $m - 1$.

Proposisi

Subruang Krylov κ_m memiliki dimensi m jika dan hanya jika kelas dari v terhadap A lebih besar dari $m - 1$.

Algoritma Arnoldi melakukan dekomposisi matriks jarang berukuran besar menjadi matriks Hessenberg dan matriks orthogonal. Misalkan A matriks berukuran $n \times n$ dan dapat dinyatakan sebagai

$$A = V_m H_m V_m^T, \qquad (1)$$

dengan V_m adalah matriks orthogonal m kolom dan H_m adalah matriks Hessenberg $m \times m$, dengan $m \leq n$. Sehingga

$$V_m = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_m]$$

dengan v_i ortogonal dengan v_j untuk $i \neq j$, dan

$$H_m = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,m-1} & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,m-1} & h_{2,m} \\ 0 & h_{3,2} & \cdots & h_{3,m-1} & h_{3,m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{m,m-1} & h_{m,m} \end{bmatrix}.$$

Dari Persamaan (1), diperoleh

$$AV_m = V_m H_m. \qquad (2)$$

Pada ruas kiri Persamaan (2), diperoleh:

$$AV_m = \begin{bmatrix} a_{1,1}v_{1,1} + \cdots + a_{1,n}v_{n,1} & a_{1,1}v_{1,2} + \cdots + a_{1,n}v_{n,2} & \cdots & a_{1,1}v_{1,m} + \cdots + a_{1,n}v_{n,m} \\ a_{2,1}v_{1,1} + \cdots + a_{2,n}v_{n,1} & a_{2,1}v_{1,2} + \cdots + a_{2,n}v_{n,2} & \cdots & a_{2,1}v_{1,m} + \cdots + a_{2,n}v_{n,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}v_{1,1} + \cdots + a_{n,n}v_{n,1} & a_{n,1}v_{1,2} + \cdots + a_{n,n}v_{n,2} & \cdots & a_{m,1}v_{1,m} + \cdots + a_{n,n}v_{n,m} \end{bmatrix}$$

dan

$$V_m H_m = \begin{bmatrix} v_{1,1}h_{1,1} + v_{1,2}h_{2,1} & v_{1,1}h_{1,2} + v_{1,2}h_{2,2} + v_{1,3}h_{3,2} & \cdots & v_{1,1}h_{1,m} + \cdots + v_{1,m}h_{m,m} \\ v_{2,1}h_{1,1} + v_{2,2}h_{2,1} & v_{2,1}h_{1,2} + v_{2,2}h_{2,2} + v_{2,3}h_{3,2} & \cdots & v_{2,1}h_{1,m} + \cdots + v_{2,m}h_{m,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1}h_{1,1} + v_{n,2}h_{2,1} & v_{n,1}h_{1,2} + v_{n,2}h_{2,2} + v_{n,3}h_{3,2} & \cdots & v_{n,1}h_{1,m} + \cdots + v_{n,m}h_{m,m} \end{bmatrix}$$

Perhatikan kolom ke-j dari Persamaan (2),

$$\begin{aligned} Av_j &= h_{1,j}v_1 + v_2 h_{2,j} + \cdots + v_{j+1}h_{j+1,j} \\ &= \sum_{i=1}^{j+1} h_{i,j}v_i \,. \end{aligned} \qquad (3)$$

Selanjutnya, jika Persamaan (3) dikalikan dengan v_k^T untuk suatu $k \in \{1,2,\dots,j\}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} v_k^T A v_j &= v_k^T v_k h_{k,j} \\ &= h_{k,j}. \end{aligned}$$

Dari, diperoleh bahwa entri matriks Hessenberg $h_{k,j}$ ditentukan oleh perkalian $v_k A v_j$.

Selanjutnya, dari Persamaan (3), vektor v_{j+1} dapat ditentukan dengan

$$v_{j+1} = \frac{1}{h_{j+1,j}}\left(Av_j - \sum_{i=1}^{j} h_{i,j}v_i\right).$$

Proses perhitungan matriks ortogonal dan matriks Hessenberg dimulai dari menentukan vektor kolom pertama dari matriks orthogonal V_m. Dipilih vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Jika norma dari b tidak bernilai 1, maka vektor b harus dinormalisasi, sehingga vektor kolom pertama dari V_m adalah

$$v_1 = \frac{b}{\|b\|}.$$

Dari langkah-langkah di atas, dapat ditentukan matriks ortogonal V_m sehingga berlaku $V_m^T A V_m = H_m$. Proses ortogonalisasi ini disebut algoritma Arnoldi.

Algoritma Arnoldi

1. **Mulai:** menentukan vektor v_1 dengan norma 1.
2. **Iterasi:** untuk $j = 1,2,\dots,m$ hitung:

$h_{i,j} = \langle Av_j, v_i \rangle$
$w_j = Av_j - \sum_{i=1}^{j} h_{i,j} v_i$
$h_{j+1,j} = \|w_j\|$, jika $h_{j+1,j} = 0$ maka iterasi berhenti
$v_{j+1} = \frac{w_j}{h_{j+1,j}}$

Algoritma di atas berhenti saat $\|w_j\|$ sama dengan atau mendekati nol.

Proses dekomposisi dengan algoritma Arnoldi akan berhenti hingga diperoleh matriks Hessenberg yang memenuhi $A = VHV^T$. Proposisi-proposisi berikut menjelaskan bahwa algoritma Arnoldi akan berhenti pada iterasi tertentu.

Proposisi

Vektor-vektor $v_1, v_2, \dots, v_m$ membentuk basis ortonormal dari subruang $\kappa_m(A, v) := span\{v_1, Av_1, \dots, A^{m-1}v_1\}$.

Proposisi

Misalkan V_m adalah matriks $n \times m$ dengan vektor kolom $v_1, v_2, \dots, v_m$ dan H_m adalah matriks Hessenberg $m \times m$ dimana entri tak nol diperoleh dari algoritma Arnoldi, maka

$$AV_m = V_m H_m + h_{m+1,m} v_{m+1} e_m^T$$
$$V_m^T A V_m = H_m$$

Proposisi

Algoritma Arnoldi berhenti pada tahap ke-j yaitu saat $w_j = 0$ jika dan hanya jika polinomial minimal dari $v_1$memiliki pangkat j.

Beberapa langkah dalam algoritma Arnoldi dapat dimodifikasi dengan langkah Gram Schmidt untuk membuat iterasi lebih efisien, sehingga diperoleh algoritma Arnoldi-Gram Schmidt yang dimodifikasi.

Algoritma Arnoldi-Gram Schmidt yang dimodifikasi

1. **Mulai:** menentukan vektor v_1 dengan norma 1.
2. **Iterasi:** untuk $j = 1,2,\dots,m$ hitung:

   i. $w = Av_j$
   ii. Untuk $i = 1,2,\dots,j$ hitung
      $h_{i,j} = \langle w, v_i \rangle$
      $w_j = w - h_{i,j} v_i$
   iii. $h_{j+1,j} = \|w_j\|$, jika $h_{j+1,j} = 0$ maka iterasi berhenti

$$\boldsymbol{v_{j+1}} = \frac{\boldsymbol{w}}{\boldsymbol{h_{j+1,j}}}.$$

3. Hasil dan Diskusi

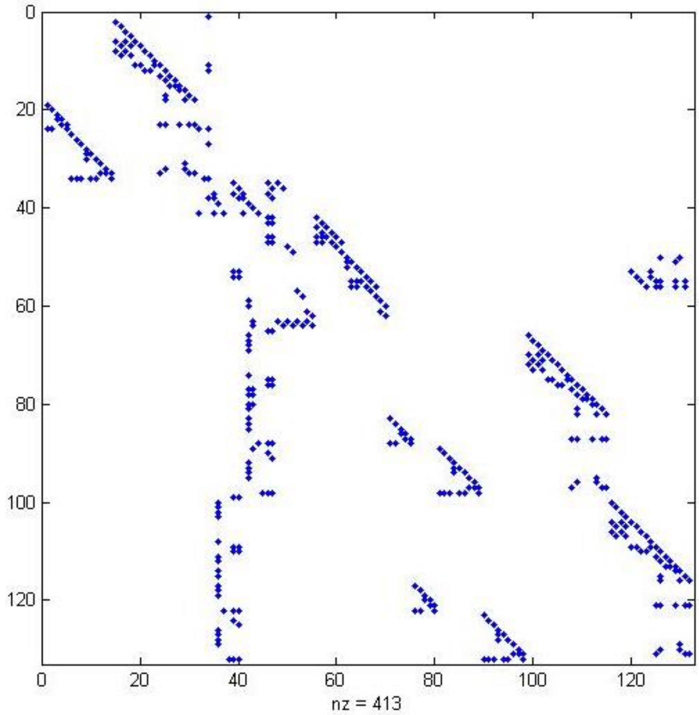
Pada bagian ini, akan dilakukan simulasi numerik terhadap matriks jarang A yang memiliki karakteristik seperti yang ditunjukkan pada Tabel 1. Matriks jarang, atau sering disebut juga sebagai matriks *sparse*, adalah jenis matriks di mana sebagian besar elemennya bernilai nol. Dalam simulasi ini, akan dipelajari sifat dan kinerja matriks jarang dengan menerapkan algoritma Arnoldi yang dirancang untuk menangani struktur jarang. Simulasi ini juga akan mempertimbangkan berbagai parameter dan kondisi untuk mendapatkan hasil yang lebih komprehensif. Akan dilakukan simulasi dengan dua vektor awalan yang berbeda untuk melihat apakah perbedaan vektor awal ini mempengaruhi nilai eigen yang diperoleh atau tidak. Lalu, akan dilakukan percobaan juga untuk ukuran matriks Hessenberg yang berbeda, apakah akan berpengaruh juga pada hasil nilai eigen yang diperoleh.

Tabel 1. Karakteristik matriks jarang

Karakter	Nilai
Jumlah baris	132
Jumlah kolom	132
Entri tak nol	413
Jenis entri	Bilangan riil
Struktur	Non simteris

Distribusi entri tak nol dari matriks jarang yang digunakan dapat dilihat pada Gambar 1. Titik berwarna biru merupakan entri tak nol bernilai riil dan area yang berwarna putih merupakan entri matriks yang bernilai nol.

Dengan algoritma Arnoldi, diperoleh matriks Hessenberg H_{10} yang ditunjukkan pada Gambar 2 dan Gambar 3. Dapat dilihat bahwa entri matriks Hessenberg yang diperoleh berbeda untuk vektor awal yang berbeda.



Gambar 1. Distribusi entri tak nol matriks jarang A

$$H_{10} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 8{,}0867 \times 10^{-3} & 1{,}9711 \times 10^{-5} & -1{,}1977 \times 10^{-1} & 1{,}6520 \times 10^{-1} & 1{,}0491 \times 10^{-3} & 1{,}6864 \times 10^{-2} & -1{,}6330 \times 10^{-3} \\
1{,}0074 & 0 & 0 & -1{,}1949 \times 10^{-3} & 8{,}1852 \times 10^{-3} & -4{,}0319 \times 10^{-2} & 5{,}6157 \times 10^{-2} & 6{,}1504 \times 10^{-2} & 5{,}8028 \times 10^{-3} & 9{,}6013 \times 10^{-4} \\
0 & 1{,}0415 & -1{,}3210 \times 10^{-2} & -7{,}2828 \times 10^{3} & -1{,}7785 \times 10 & -1{,}1381 \times 10^{2} & 8{,}2825 \times 10 & -1{,}1646 \times 10^{2} & 1{,}0450 \times 10 & -3{,}3960 \\
0 & 0 & 1{,}1219 & -7{,}5650 \times 10^{2} & -1{,}8860 & -1{,}1799 \times 10 & -1{,}6359 & -1{,}2200 \times 10 & 9{,}0283 \times 10^{-2} & -2{,}5977 \times 10^{-1} \\
0 & 0 & 0 & 3{,}0947 \times 10^{5} & 7{,}5651 \times 10^{2} & 4{,}8451 \times 10^{3} & -3{,}5698 \times 10^{3} & 4{,}9641 \times 10^{3} & -4{,}4890 \times 10^{2} & 1{,}4510 \times 10^{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4{,}0308 & -4{,}8496 \times 10^{-2} & -2{,}5193 & 4{,}3784 \times 10^{-2} & -2{,}4890 \times 10^{-1} & 2{,}8341 \times 10^{-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}8576 & -5{,}3118 & -5{,}0583 & 6{,}9359 \times 10^{-1} & -7{,}4917 \times 10^{-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6{,}3713 \times 10^{2} & 5{,}4243 & 5{,}8562 \times 10 & -5{,}8069 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5{,}4243 & 1{,}9084 \times 10^{-1} & 1{,}2483 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}3049 \times 10^{2} & -1{,}2330 \times 10^{-1}
\end{bmatrix}$$

Gambar 2. Matriks Hessenberg H_{10} dengan awalan v

$$H_{10} = \begin{bmatrix}
-5{,}3878 \times 10^{3} & -9{,}6784 \times 10^{2} & -6{,}7642 \times 10^{2} & -5{,}5045 \times 10^{2} & 4{,}2859 \times 10^{2} & 1{,}3673 \times 10^{2} & -4{,}5261 \times 10^{2} & 9{,}4823 \times 10^{2} & 1{,}1801 \times 10^{2} & 8{,}3278 \times 10^{2} \\
3{,}0283 \times 10^{4} & 5{,}3887 \times 10^{3} & 3{,}7592 \times 10^{3} & 3{,}0989 \times 10^{3} & -2{,}3483 \times 10^{3} & -7{,}0018 \times 10^{2} & 2{,}5598 \times 10^{3} & -5{,}2381 \times 10^{3} & -6{,}1170 \times 10^{2} & -4{,}1728 \times 10^{3} \\
0 & 7{,}3325 \times 10 & -3{,}2277 & 3{,}7425 & -5{,}2703 \times 10 & 3{,}8583 & 2{,}3640 \times 10 & -1{,}3722 \times 10^{2} & 3{,}2326 & 6{,}4305 \times 10 \\
0 & 0 & 7{,}8304 \times 10 & -2{,}6569 & -1{,}3385 \times 10 & -1{,}3896 \times 10^{2} & 1{,}6795 & -4{,}5212 & -7{,}4437 & 2{,}1139 \\
0 & 0 & 0 & 1{,}3951 \times 10 & 1{,}0011 \times 10 & -2{,}7500 \times 10^{-1} & 2{,}0990 \times 10 & -9{,}0040 & -5{,}8441 & 3{,}7092 \times 10^{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 9{,}0886 \times 10 & -5{,}4555 & 5{,}6790 & -8{,}5941 \times 10 & 1{,}4185 & 1{,}3612 \times 10^{-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}7266 \times 10^{1} & -2{,}0909 & -7{,}5391 & -1{,}1129 \times 10^{2} & -5{,}3703 \times 10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}3107 \times 10 & 2{,}2880 & -9{,}8300 & 3{,}8577 \times 10^{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2{,}3675 \times 10 & -1{,}0105 & 1{,}6919 \times 10 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}0387 \times 10 & -4{,}7014
\end{bmatrix}$$

Gambar 3. Matriks Hessenberg H_{10} dengan awalan w

Sehingga, dapat dilihat bahwa vektor awalan akan menentukan matriks Hessenberg yang berbeda juga pada ukuran yang sama. Hal ini dapat terjadi karena vektor kolom matriks V yang dibentuk akan berbeda karena menyesuikan keortogonalan vektor kolom pertama dari matriks V, sehingga koefisien atau entri matriks Hesseenber yang diperoleh juga berbeda.

Selanjutnya, karena matriks Hessenberg yang dihasilkan berbeda maka akan memunculkan kemungkinan nilai eigennya juga berbeda. Nilai eigen dari kedua matriks H_{10} pada Gambar 2 dapat dilihat pada Tabel 2 dan dari matriks H_{10} pada Gambar 3 dapat dilihat pada Tabel 3. Dapat dilihat bahwa kedua matriks menghasilkan nilai eigen yang berbeda.

Selanjutnya, dilakukan simulasi numerik yang lain untuk melihat bagaimana pengaruh ukuran matriks Hessenberg yang dibentuk dengan hasil nilai eigen yang diperoleh. Dengan awalan vektor v akan diperoleh matriks diperoleh nilai eigen pada Gambar 4 dan Gambar 5. Gambar 4 menunjukkan nilai eigen dari matriks Hessenberg H_{10} dan Gambar 5 menunjukkan nilai eigen dari matriks Hessenberg H_{50}. Kedua gambar menunjukkan bahwa Hessenberg yang lebih besar memberikan pendekatan nilai eigen yang lebih baik. Selain itu, dengan awalan vektor w akan diperoleh nilai eigen pada Gambar 6 dan Gambar 7. Gambar 6 menunjukkan nilai eigen dari matriks Hessenberg H_{10} dan Gambar 7 menunjukkan nilai eigen dari matriks Hessenberg H_{50}. Berlaku juga seperti percobaan sebelumnya, bahwa matriks Hessenberg yang lebih besar memberikan pendekatan nilai eigen yang lebih baik.

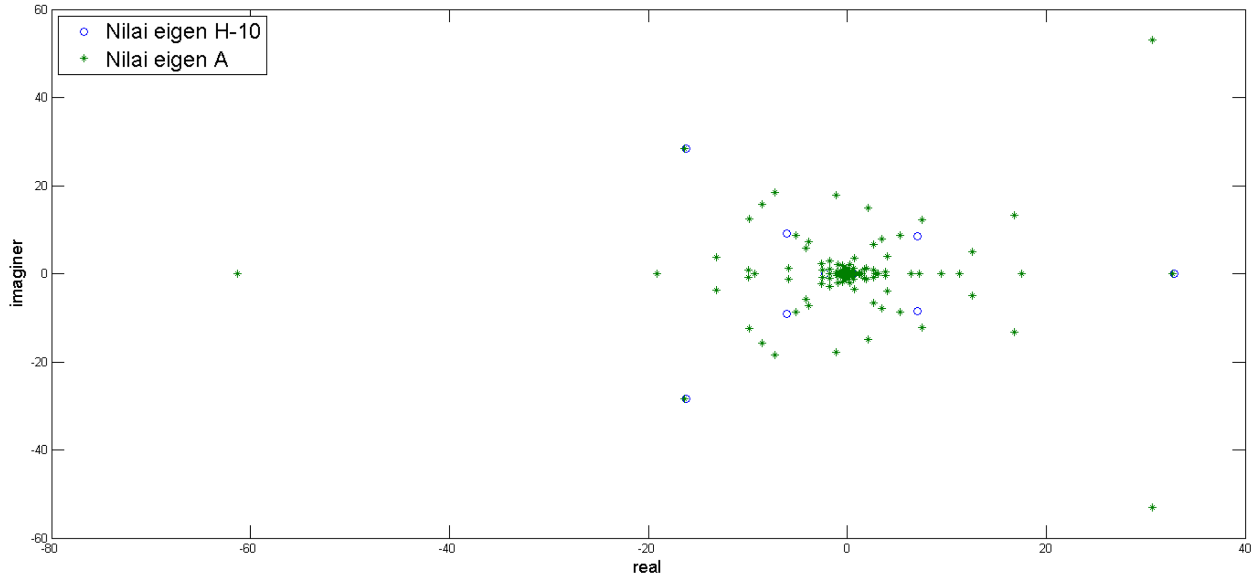
Berdasarkan hasil eksperimen numerik yang dilakukan pada bagian sebelumnya, dapat diambil beberapa hal penting terkait kinerja Algoritma Arnoldi. Pertama, vektor awal yang digunakan dalam algoritma ini memiliki pengaruh signifikan terhadap hasil nilai eigen yang diperoleh. Dalam eksperimen, dua jenis vektor awal digunakan: vektor v dengan entri awal 1 dan entri lain 0, serta vektor w dengan semua entri bernilai 1. Hasil simulasi menunjukkan bahwa perbedaan vektor awal menghasilkan nilai eigen yang berbeda. Namun, meskipun nilai eigen yang dihasilkan berbeda, semua nilai eigen numerik tetap mendekati nilai eigen eksak. Hal ini menunjukkan Algoritma Arnoldi dalam menghasilkan solusi yang baik meskipun dengan variasi vektor awal.

Tabel 2. Nilai eigen dan residu H_{10} dengan awalan v

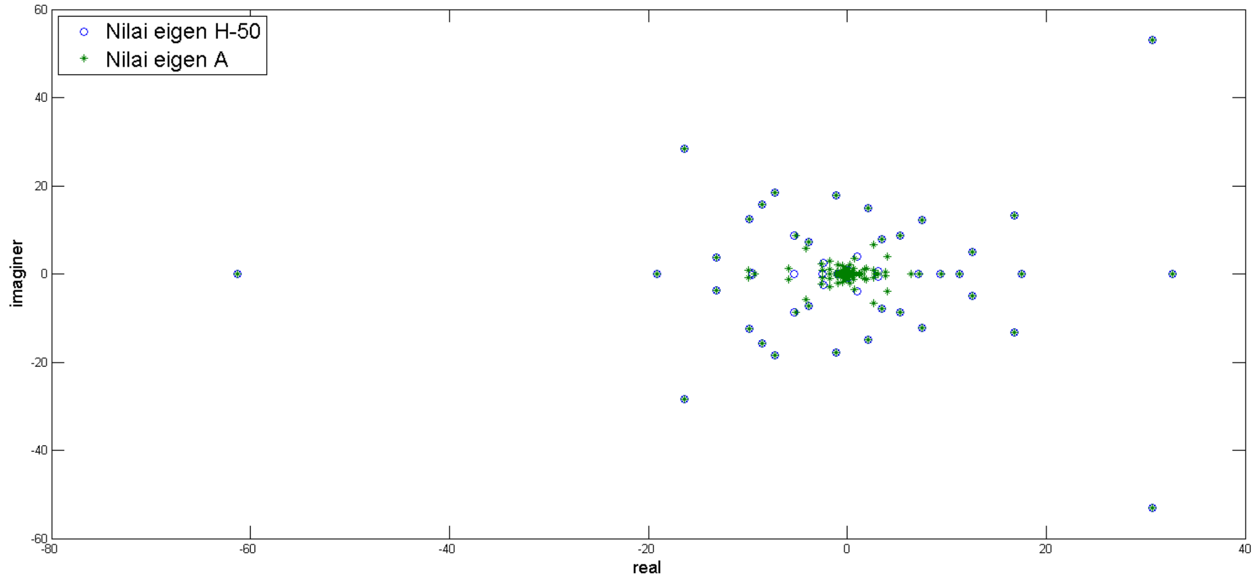
Nilai eigen	Residu
$32,9142$	$0,6553$
$-16,1767 + 28,3325i$	$0,7010$
$-16,1767 - 28,3325i$	$0,7010$
$7,0564 + 8,5577i$	$1,0784$
$7,0564 - 8,5577i$	$1,0784$
$-6,0750 + 9,1674i$	$1,0784$
$-6,0750 - 9,1674i$	$1,0784$
$-2,2256$	1,0826
$-0,7053$	1,0826
0,5385	1,0826

Tabel 3. Nilai eigen dan residu H_{10} dengan awalan w

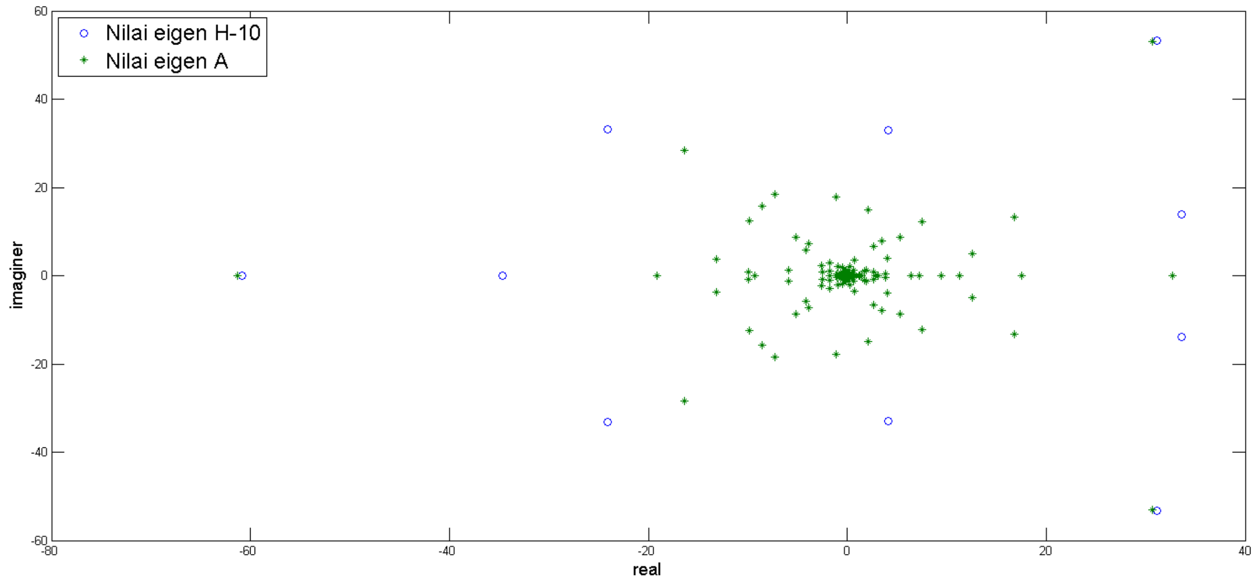
Nilai eigen	Residu
$31,1037 + 53,1684i$	$0,0484$
$31,1037 - 53,1684i$	$0,0484$
$33,6393 + 13,7939i$	$0,4559$
$33,6393 - 13,7939i$	$0,4559$
$-60,8192$	$0,0502$
$4,10334 + 32,8935i$	$0,4888$
$4,10334 - 32,8935i$	$0,4888$
$-24,0527 + 33,0624i$	$0,5725$
$-24,0527 - 33,0624i$	$0,5725$
$-34,6461$	$0,4079$



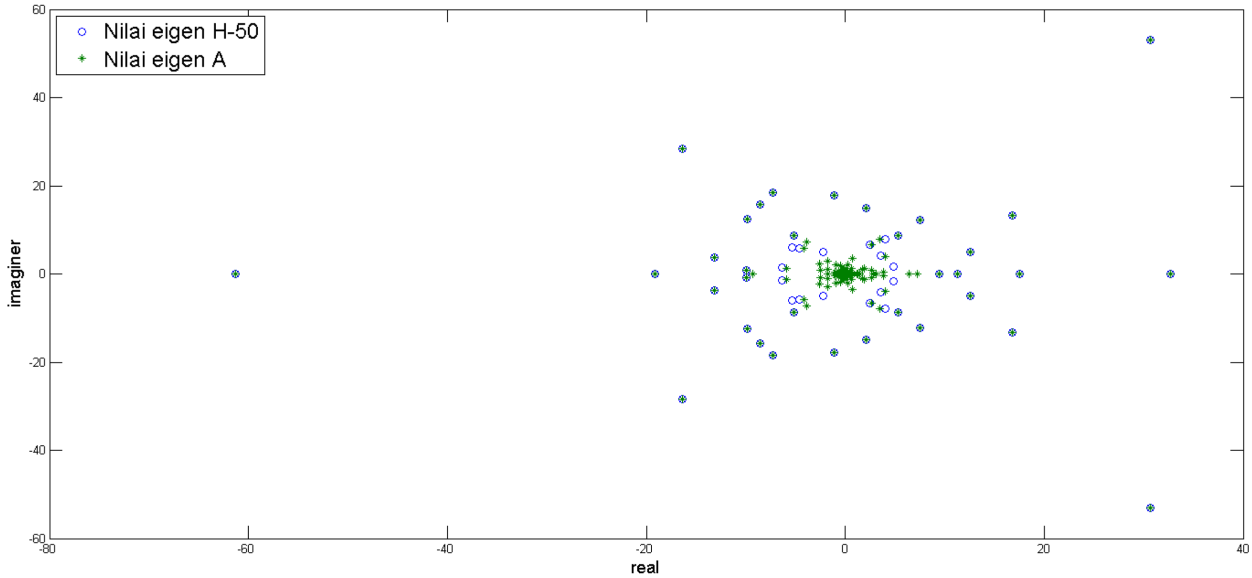
Gambar 4. Perbandingan nilai eigen matriks H_{10} dan A dengan awalan v



Gambar 5. Perbandingan nilai eigen matriks H_{50} dan A dengan awalan v



Gambar 6. Perbandingan nilai eigen matriks H_{10} dan A dengan awalan



Gambar 7. Perbandingan nilai eigen matriks H_{50} dan A dengan awalan w.

Kedua, ukuran matriks Hessenberg yang dihasilkan dari iterasi Algoritma Arnoldi juga mempengaruhi hasil nilai eigen yang diperoleh. Dari percobaan, terlihat bahwa matriks Hessenberg yang lebih besar cenderung memberikan nilai eigen numerik yang lebih mendekati nilai eigen eksak. Ini menunjukkan bahwa meningkatkan ukuran matriks Hessenberg dapat meningkatkan akurasi hasil yang diperoleh, meskipun dengan peningkatan kebutuhan komputasi.

4. Kesimpulan

Algoritma Arnoldi merupakan pendekatan numerik yang dapat menyelesaikan masalah matriks raksasa dengan memperkirakan nilai eigen matriks besar dengan cukup baik. Algoritma ini dapat menyelesaikan masalah kompleksitas dari suatu masalah matriks berukuran raksasa. Algoritma memanfaatkan vektor awal tak nol sebagai nilai awal masukkan dari Algoritma Arnoldi untuk membangun suatu matriks yang disebut matriks Hessenberg. Fleksibilitas Algoritma Arnoldi dalam pemilihan vektor awal merupakan keuntungan dalam menyelesaikan masalah nilai eigen, dimana kebebasan pemilihan nilai awal ini memudahkan dalam menerapkan algoritma ini pada berbagai masalah di berbagai bidang sains, termasuk fisika, teknik, matematika terapan, dan ilmu komputer. Kebebasan penggunakan vektor awal ini membuat algoritma dapat digunakan dalam skenario berbeda, memungkinkan solusi khusus terhadap masalah tertentu.

Selain itu, ukuran matriks Hessenberg merupakan faktor penting dalam memastikan akurasi pendekatan numerik. Jika matriks Hessenberg diperbesar ke ukuran yang lebih besar, algoritma Arnoldi dapat mendekati nilai eigen eksak. Sehingga, Algoritma Arnoldi merupakan metode numerik yang cukup akurat dalam menyelesaikan masalah numerik nilai eigen dalam aplikasi matematika.

Daftar Pustaka

1. Alim, K., Rahmawati, A., & Matsaany, B. (2023). Formation of Optimal Portfolio on JII Stock using Sharpe, Treynor, and Jensen Indices during the Period of 2018-2023. Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi/Jurnal Matematika Statistik Dan Komputasi, 19(3), 593–601. https://doi.org/10.20956/j.v19i3.26354
2. Barrante, J. R. (2016). Applied Mathematics for Physical Chemistry. Waveland Press.
3. Boas, M. L. (2015). Mathematical methods in the physical sciences. Wiley.
4. Riani, I., Kusumastuti, N., & Kiftiah, M. (2015). Penyelesaian Masalah Nilai Eigen untuk Persamaan Diferensial Sturm-Liouville dengan Metode Numerov. Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika Dan Terapannya, 4(03). https://doi.org/10.26418/bbimst.v4i03.13282
5. Saad, Y. (2011). Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems. SIAM.
6. Voss, H. (2004). An Arnoldi Method for Nonlinear Eigenvalue Problems. BIT Numerical Mathematics, 44(2), 387–401. https://doi.org/10.1023/b:bitn.0000039424.56697.8b

7. Zulkipli, Z. (2023). Hubungan antara Kemampuan 1. Matematika dengan Keterampilan Pemrograman. Bangkit Indonesia/Jurnal Ilmiah Bangkit Indonesia, 12(2), 59–64. https://doi.org/10.52771/bangkitindonesia.v12i2.251