Multi Proximity: Jurnal Statistika Universitas Jambi
Vol. 1 No. 1 Mei 2022
https://online-journal.unja.ac.id/multiproximity

Kajian Ukuran Keirasionalan pada Barisan Bilangan Real

The Study of Irrationality Measures on Real Number Series

Deli Senia Genti[1*] , Yulia Safitri[1] , Nur Afrinda[1]

[1] Universitas Jambi
e-mail:dseniage@gmail.com

Abstrak

Berkat bilangan dan konstanta yang telah Livioulle kembangkan, Joseph Liouville telah menemukan rumusan teorema Liouville yang pada akhirnya juga digunakan untuk menurunkan suatu rumus mengenai ukuran keirasioanlan bilangan yang didefinisikan seberapa dekat x dapat diperkirakan dalam bilangan rasional. Hasil yang telah dikembangkan oleh Joseph Liouville kemudian di telaah oleh Erdoss dan Strauss pada tahun 1974 yang telah berhasil membuktikan keirasionalan dan rasional yang bersifat bebas dari beberapa jenis deret. Selain itu, hasil dari Joseph Liouville juga ditelaah oleh Borwein pada tahun 1991 dan 1992 yang mengemukakan bahwa ada beberapa deret yang irasional tetapi bukan bilangan Liouville. Selanjutnya oleh Jaroslav Hancl dan Ferdinand Filip yang telah berhasil merumuskan dua kriteria batas bawah ukuran keirasionalan pada barisan tertentu. Penelitian ini dilakukan dengan mengambil sumber data berupa sumber data sekunder untuk mengkaji ukuran kerasionalan pada bilangan real.Dari definisi dan teorema serta lemma yang diambil lalu dilakukan analisis pada setiap definisi dan teorema serta lemma yang diambil. Analisis dilakukan dengan berbagai langkah pembuktian dalam matematika. Langkah – langkah ini juga mengambil proposisi-proposisi untuk melakukan analisis lebih lanjut. Dari hasil dan pembahasan yang dianalisis pada Bab IV telah berhasil membuktikan tentang kajian ukuran keirasionalan pada barisan bilangan real. Hal ini telah dilakukan pembuktian-pembuktian yang dapat meyakinkan bahwa suatu bilangan irasional itu ada pada suatu bilangan real yang sulit didefinisikan.

Kata Kunci: Ukuran Keirasionalan, Barisan Bilangan Real

Abstract

Thanks to the numbers and constants that Livioulle had developed, Joseph Liouville had discovered the formulation of Liouville's theorem which was eventually also used to derive a formula for the measure of the irrationality of numbers which defines how closely x can be estimated in rational numbers. The results that have been developed by Joseph Liouville were then reviewed by Erdoss and Strauss in 1974 who have succeeded in proving irrationality and rationality that are independent of several types of series. In addition, the results of Joseph Liouville were also studied by Borwein in 1991 and 1992 who suggested that there are some irrational series but not Liouville numbers. Furthermore, by Jaroslav Hancl and Ferdinand Filip who have succeeded in formulating two lower limit criteria for the measure of irrationality in certain sequences. This research was conducted by taking data sources in the form of secondary data sources to examine the measure of rationality in real numbers. The analysis is carried out with various proof steps in mathematics. These steps also take propositions for further analysis. From the results and discussion analyzed in Chapter IV, it has succeeded in proving the study of the size of irrationality in the sequence of real numbers. This has been done by proofs that can ensure that an irrational number exists in a real number that is difficult to define.

***Keyword**: Irrationality Measures, Real Number Sequences*

Pendahuluan

Secara umum,bilangan dapat dibagi atas dua bagian yaitu bilangan real dan bilangan imajiner. Pada bagian bilangan real, dibagi lagi menjadi dua golongan yaitu golongan bilangan rasional dan golongan bilangan irrasional. Setiap golongan dibagi lagi atas beberapa bagian yaitu pada golongan bilangan real dibagi atas bilangan bulat dan bilangan pecahan, sedangkan pada golongan bilangan irasional dibagi atas bilangan aljabar dan bilangan transendental.

Pada paper Leibniz pada tahun 1682, dimana Euler adalah orang pertama yang telah berhasil mendefinisikan bilangan transendental sebagai bilangan yang bukan merupakan akar persamaan polinomial tak konstan dengan koefisien rasional serta telah membuktikan bahwa $\sin x$ bukan merupakan fungsi aljabar dari x.

Pada tahun 1844 definisi mengenai bilangan transendental dikembangkan oleh Joseph Liouville yang telah berhasil membuktikan tentang bilangan transendental. Bahkan pada tahun 1851 Joseph Liouville berhasil menentukan konstanta penting yang kemudian dikenal sebagai konstanta Liouville. Kemudian Liouville mengembangkannya menjadi definisi bilangan Liouville serta mampu menunjukkan bahwa bilangan Liouville merupakan bilangan transendental.

Berkat bilangan dan konstanta yang telah Livioulle kembangkan, Joseph Liouville telah menemukan rumusan teorema Liouville yang pada akhirnya juga digunakan untuk menurunkan suatu rumus mengenai ukuran keirasioanlan bilangan yang didefiniskan seberapa dekat x dapat diperkirakan dalam bilangan rasional.

Hasil yang telah dikembangkan oleh Joseph Liouville kemudian di telaah oleh Erdoss dan Strauss pada tahun 1974 yang telah berhasil membuktikan keirasionalan dan rasional yang bersifat bebas dari beberapa jenis deret. Selain itu, hasil dari Joseph Liouville juga ditelaah oleh Borwein pada tahun 1991 dan 1992 yang mengemukakan bahwa ada beberapa deret yang irasional tetapi bukan bilangan Liouville. Selanjutnya oleh Jaroslav Hancl dan Ferdinand Filip yang telah berhasil merumuskan dua kriteria batas bawah ukuran keirasionalan pada barisan tertentu.

Dilihat dari sejarahnya, penemu bilangan irrasional adalah Hippasus dari Metapontum (500 SM). Namun, karena penemuannya tersebut menyebabkan kematiaannya karena Pythagoras menganggap Hippasus menganut petuah sesat dan mengakibatkan hukuman mati pada Hippasus. Namun, dalam doctore in Absentia-nya di tahun 1799 Gauss memberikan bukti teorema fundamental aljabar yang menyatakan bahwa tiap-tiap dari polinomial variabel tunggal bukan konstanta dengan koefisien kompleks memiliki sangat sedikit atau setidaknya satu akar kompleks. Sayangnya hal itu juga menuai konflik dan polemik pada saat itu.

Upaya Gauss dalam membuktikan konsep mengenai bilangan kompleks untuk adanya bilangan irasional disana banyak diperdebatkan, dengan contoh bilangan irasional yaitu $\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$. Dari contoh tersebut Gauss berhasil membuktikan bilangan irasional yang sebelumnya dianggap bilangan selang berada dan tiada menjadi dapat diperkirakan.

Pada abad ke-19 Abraham de Moivre dan Leonhard Euler, telah membagi bilangan irasional menjadi bilangan aljabar dan bilangan transenden. Bukti keberadaan bilangan transenden ini sebenarnya sudah lama diperkirakan oleh Euclid. Akhirnya, tulisan ini telah di akui melalui tulisan-tulisan Joseph Louis Lagrange. Dirichlet juga telah menambahkan bahwa dalam teori ini juga telah banyak sekali kontributor untuk penerapan mengenai pembahasan ini.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa bilangan irasional adalah bilangan yang sulit untuk dipecahkan atau sulit untuk dibagi yang mana dalam hal ini hasil bagi nya tak terhenti. Maka jelas bahwa bilangan irasional tidak sama dengan bilangan rasional yang dapat dikemukan sebagai $\frac{a}{b}$ dengan a dan b sebagai bilangan bulat dan $b \neq 0$. contoh yang sangat terkenal dari bilangan irasional yaitu $\pi, \sqrt{2},\ dan\ e$.

Selain itu, ada juga pengertian dari bilangan transendental dan bilangan Liouville. Bilangan transendental adalah bilangan real yang bukan merupakan akar dari persamaan polinomial tak konstan dengan koefisien bilangan rasional. Untuk bilangan Liouville adalah suatu bilangan yaitu x dimana untuk setiap bilangan bulat positif misalnya terdapat bilangan bulat p dan q yang besar daripada 1 (q>1) sehingga memenuhi pertidaksamaan $0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$.

Berdasarkan pemaparan diatas, dalam tugas karya ilmiah ini peneliti akan membahas masalah teorema-teorema yang menguatkan mengenai ukuran keirasionalan pada barisan bilangan real dan bagaimana pembuktiannya pada ukuran keirasionalan pada barisan bilangan real.

Metode Penelitian

Dalam penelitian ini menggunakan metode penelitian berupa literatur pustaka, dengan tahapan-tahapan sebagai berikut: a) Mencari sumber-sumber terpercaya dari e-book dan beberapa jurnal, b) memahami dan menganalisa definisi ukuran keirasionalan, c) mengkaji ukuran keirasionalan pada barisan bilangan real, d) menuliskan hasil dari analisa dan kajian yang dilakukan. Pada penelitian ini peneliti mengambil sumber data berupa sumber data sekunder untuk mengkaji ukuran kerasionalan pada barisan bilangan real. Sumber data sekunder menurut (S. Nasution; 2012) adalah sumber bahan bacaan, berupa surat-surat pribadi, dokumen-dokumen resmi, buku-buku, hasil-hasil penelitian yang berwujud laporan, dan sebagainya. Jadi dapat dikatakan bahwa sumber data sekunder adalah sumber data yang mendukung dalam penelitian yang mana sumber data sekunder ini diperoleh dari penelitian yang telah ada sebelumnya.

Hasil dan Pembahasan

a. Ukuran Keirasionalan pada Bilangan Real

Adapun definisi dan teorema yang digunakan pada pembahasan kali ini adalah sebagai berikut:

Definisi :

Jika ξ adalah bilangan irasional, maka bilangan

$$q \to \infty, q \in N lim\ sup\left(min\, p \in N \left|\xi - \frac{p}{q}\right|\right)^{-1}$$

Disebut ukuran keirasionalan dari bilangan ξ.

Teorema :

Setiap bilangan irasional memiliki ukuran keirasionalan lebih besar atau sama dengan 2. Jadi, setiap bilangan irasional itu memiliki ukuran dari keirasionalan yang harus lebih besar atau sama dengan dua sesuai dengan definisi yang telah dituliskan.

b. Kriteria Keirasionalan Barisan pada Bilangan Real

Adapun definisi dan lemma yang digunakan pada pembahasan kali ini adalah sebagai berikut :

Definisi 1 :

Diberikan $\{x_n\}\infty\, n = 1$ adalah suatu barisan pada bilangan real yang positif. Jika untuk setiap barisan pada bilangan positif $\{C_n\}\infty\, n = 1$ dimana jumlahan dari deretnya adalah sebagai berikut :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n c_n}$$

Yang merupakan bilangan irasional, maka barisan pada $\{x_n\}\infty\, n = 1$

yang diberikan tadi adalah suatu bilangan irasional. Jika $\{x_n\}\infty\, n = 1$ yang diberikan tadi bukanlah suatu bilangan irasional melainkan bilangan yang rasional.

Definisi 2 :

Selain definisi diatas, ada juga definisi yang menyatakan suatu ukuran keirasionalan dari barisan $\{x_n\}\infty\ n = 1$, yaitu :

$$\underset{\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \in \Theta}{inf} \ \underset{q \to \infty,\, q\ \in N}{\lim\ sup} \log_q \left(\underset{p\ \in\ N}{min} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n c_n} - \frac{p}{q} \right| \right)^{-1}$$

Definisi diatas merupakan suatu definisi dari keirasionalan suatu barisan pada bilangan real. Dimana suatu bilangan irasional telah dapat terbukti bahwa bilangan irasional itu ada pada bilangan real dengan definisi diatas.

Teorema :

Diberikan ε dan H adalah dua bilangan yang positif dengan H > 1. Jika $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah dua barisan yang positif dengan $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tidak turun dan juga memenuhi $\underset{n \to \infty}{\lim\ sup}\, a_n^{\frac{1}{(H+1)^n}} > 1$ dan untuk setiap bilangan yang positif maka berlaku$r_n > n^{1+\varepsilon\varepsilon}$, lalu untuk setiap bilangan real positif dalam bentuk β berlaku $b_n = O\left(a_n^{\beta}\right)$, maka barisan $\left\{\frac{r_n}{s_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan irasional dengan ukuran keirasionalannya lebih besar atau sama dengan max(2,H).

Dengan teorema diatas maka dapat dapat dilihat keirasionalannya pada barisan bilangan real yang dibuktikan dengan menggunakan metode kontradiksi , yaitu sebagai berikut :

Bukti :

Asumsikan $\mu\left(\{r_n\}_{n=1}^{\infty}\right) < H$,dimana $\mu(\{x_n\})$menyatakan ukuran dari keirasionalan dari barisan $\{x_n\}$, maka :

$$\mu\left(\{r_n\}_{n=1}^{\infty}\right) < H - H_1; H_1 \in R, H_1 \to 0,$$

$$\therefore H_1 < min\left(H - 1, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right); \forall \varepsilon \in R.$$

Dimana dapat juga diasumsikan $\frac{H_1}{H} = \varepsilon_{,1} \to H\varepsilon_1 = H_{1.}$.

Untuk $s_n = O\binom{\varepsilon_1}{r_n}, ; \beta \in\ R^+, ambil\ \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}; \varepsilon, \varepsilon_1\ \in\ R^+,$

$$\to \varepsilon_1 \complement\, \beta, sehingga\ berlaku :$$

$$s_n = O(\varepsilon_1\, r_n\,),\ \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}; \varepsilon, \varepsilon_1\ \in\ R^+. \blacksquare$$

Ini telah membuktikan bahwa $\{r_n\}\infty\, n = 1$ merupakan barisan irasional berdasarkan pembuktian kontradiksi diatas. Dimana $H(1-\varepsilon_{1)} = H - H\varepsilon_1 = H - H_1$, dengan hal inilah terjadi suatu kontradiksi. Sehingga ini harus dengan syarat yaitu $\mu\left(\{r_n\}_{n\,=\,1}^{\infty}\right) \geq H$ sehingga diperoleh $\mu\left(\{r_n\}_{n\,=\,1}^{\infty}\right) \geq \max(2, H)$. ■

Lemma 1 :

Diberikan $\varepsilon_1$adalah suatu bilangan real yang positif dengan $\epsilon_1 < 1$. Jika $\{r_n\}\infty\, n = 1$ dan $\{s_n\}\infty\, n = 1$ merupakan dua barisan bilangan bulat yang positif dimana $\{r_n\}\infty\, n = 1$ tidak menurun atau turun, sehingga memenuhi bahwa $s_n = O(\varepsilon_1\, r_n\,)$ maka $r_n > 2^n$dimana untuk setiap n yang cukup besar, maka untuk setiap $\varepsilon_2$dengan $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ dimana n suatu bilangan yang cukup besar maka berlaku :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s_n + i}{r_n + i} \leq \frac{1}{r_n{}^{1-\epsilon_2}}$$

Dengan definisi yang telah ditunjukkan bahwa adanya bilangan irasional pada barisan bilangan real serta pembuktian yang kontradiksi telah membuktikan bahwa teorema tersebut menyatakan bahwa keirasionalan pada suatu bilangan real itu ada. Ditambah juga dengan adanya lemma yang telah menunjukkan bahwa keirasionalam pada bilangan real itu berlaku.

c. Akibat-Akibat Kriteria Batas Bawah Ukuran Keirasionalan pada Barisan Bilangan Real

Berdasarkan dua kriteria batas bawah ukuran keirasionalan pada barisan bilangan real, jika ditambahkan persyaratan baru menghasilkan dua akibat.

Akibat 1

Diberikan ε_1 dan S bilangan real positif dengan S(1 - ε_1)>2. Jika $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah dua barisan bilangan bulat positif dimana $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tidak turun, dengan

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/(S+1)^n} > 1 \text{ dan} b_n = o(a_n^{\varepsilon_1}), \text{ maka}$$

barisan$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ mempunyai ukuran keirasionalan lebih besar atau sama dengan S(1 - ε_1).

Bukti :

Sesuai dengan teorema, karena $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ memenuhi sifat $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tidak turun, dan $\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/(S+1)^n} > 1$, serta $b_n = o(a_n^{\varepsilon_1})$ maka

$$\mu\left(\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}\right) \geq \max(2, S(1 - \varepsilon_1)),$$

dimana $\mu(\{x_n\})$ menyatakan ukuran keirasionalan dari baris $\{x_n\}$.

Karena $S(1 - \varepsilon_1)>2$; ε_1, $S\in \mathbb{R}^+$, maka

$$\mu\left(\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}\right) \geq S(1 - \varepsilon_1),$$ sehingga terbukti..

Akibat 2

Diberikan S adalah suatu bilangan real positif dengan S > 2. Jika $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah dua barisan bilangan positif dimana $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tidak turun, dengan $\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/(S+1)^n} > 1$, dan $b_n = o(a_n^{\varepsilon_1})$ untuk setiap bilangan real positif β, maka barisan $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ mempunyai ukuran keirasionalan lebih besar atau sama dengan S.

Bukti:

Karena $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ memenuhi sifat-sifat : $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tidak turun, dan $\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/(S+1)^n} > 1$, serta $b_n = o(a_n^{\varepsilon_1})$ maka

$$\mu\left(\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}\right) \geq \max(2, S),$$

dimana $\mu(\{x_n\})$ menyatakan ukuran keirasionalan dari baris $\{x_n\}$.

Karena S > 2; $S\in \mathbb{R}^+$, maka

$$\mu\left(\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}\right) \geq S,$$ sehingga terbukti.

d. Proposisi-proposisi yang Berkaitan dengan Akibat-Akibat Kriteria Batas Bawah Ukuran Keirasionalan pada Barisan Bilangan Real

Apabila dua kriteria batas bawah ukuran keirasionalan barisan bilangan real diaplikasikan dengan syarat khusus pada barisan tertentu maka akan menghasilkan beberapa proposisi, yaitu:

Proposisi 1

Diberikan K suatu bilangan bulat positif dengan $K\left(1 - \frac{1}{log 2e}\right) > 2$. Jika lcm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ menyatakan kelipatan persekutuan terkecil dari bilangan $x_1, x_2, \ldots, x_n$, maka barisan

$\left\{\frac{lcm(1,2,\ldots,(K+1)^n)+n}{2^{(K+1)^n)}+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ mempunyai ukuran keirasionalan lebih besar atau sama dengan K$\left(1-\frac{1}{log_2 e}\right)$.

Bukti:

Dari barisan $\left\{\frac{lcm(1,2,\ldots,(K+1)^n)+n}{2^{(K+1)^n)}+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ diketahui terdapat dua barisan bilangan bulat positif $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tidak turun, yaitu a_n=lcm(1,2,…,$(K+1)^n$) + n dan b_n= $2^{(K+1)^n}$+n^2. Kemudian ditunjukkan bahwa a_n dan b_n memenuhi :

1. $\limsup_{n\to\infty} {a_n}^{1/(S+1)^n} > 1$
2. b_n= $0(a_n^{\varepsilon 1})$

Untuk syarat 1:

$\limsup_{n\to\infty} (lcm(1,2,\ldots,(K+1)^n)+n)^{1/(S+1)^n}$

$= \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k}$ (lcm(1,2,…,$(K+1)^n$) + $n)^{1/(S+1)^n}$

$= \inf_{k\geq 1}$ (lcm(1,2,…,$(K+1)^k$) + $k)^{1/(S+1)^k}$

=(lcm(1,2,…,$(K+1)^k$) + $k)^{1/(S+1)^k}$; k ≥ 1

Karena kelipatan persekutuan terkecil dari bilangan bulat positif adalah bilangan bulat positif, maka lcm(1,2, … $(K+1)^K$)≥ 1, sehingga lcm(1,2, … $(K+1)^k$) + k> 1, dan berakibat (lcm(1,2,…,$(K+1)^k$) + $k)^{1/(S+1)^k}$ > 1, sehingga syarat 1 terpenuhi.

Untuk syarat 2, b_n= $0(a_n^{\varepsilon 1})$ artinya terdapat suatu bilangan real M sehingga $|b_n| \leq$ M$|a_n^{\varepsilon 1}|$. Karena untuk a_n =lcm(1,2, … , $(K+1)^n$) + n dan b_n=$2^{(k+1)^n}$ + n^2 terdapat suatu bilangan real M yang memenuhi

$$\left|2^{(k+1)^n+n^2}\right| \leq M|(\text{lcm}(1,2,\ldots,(\text{K}+1)\text{n})+n)^{\varepsilon 1}|$$

$|b_n| \leq M|a_n^{\varepsilon 1}|$, maka syarat dua terpenuhi. Oleh karena itu maka contoh tersebut sesuai dengan akibat, K$\left(1-\frac{1}{log_2 e}\right) > 2 \cong S(1-\varepsilon_1) > 2$, yang artinya S = K dan $\varepsilon_1 = \frac{1}{log_2\, e}$. Sehingga, $\left(\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}\right) \geq S(1-\varepsilon_1)$

= K$\left(1-\frac{1}{log_2 e}\right)$ dan proposisi tersebut terbukti.

Proposisi 2

Diberikan S suatu bilangan bulat positif dengan S > 2. Jika diasumsikan $\pi(x)$ adalah bilangan prima yang lebih kecil atau sama dengan x, maka barisan

$$\{\pi((S+1)^n)!+1\}_{n=1}^{\infty}$$

mempunyai ukuran keirasionalan lebih besar atau dengan S.

Bukti:

Dari barisan $\{\pi((S+1)^n)!+1\}_{n=1}^{\infty}$ diketahui terdapat dua barisan bilangan bulat positif $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tidak turun, yaitu $a_n = \pi((S+1)^n)!+1$ dan $b_n = 1$.

Kemudian ditunjukkan bahwa a_n dan b_n memenuhi:

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n^{1/(S+1)^n > 1}$
2. $b_n = 0(a_n^{\beta})$

Untuk syarat 1:

$$\limsup_{n\to\infty} (\pi((S+1)^n)!+1)^{1/(S+1)^n}$$

$$= \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} (\pi((S+1)^n)!+1)^{1/(S+1)^n}$$

$$= \inf_{k\geq 1} (\pi((S+1)^k)!+1)^{1/(S+1)^k}$$

$$= (\pi((S+1)^k)!+1)^{1/(S+1)^k} \; ; \text{k} \geq 1$$

Karena bilangan prima terkecil adalah 2, maka $\pi((S+1)^k)! > 1$, sehingga $\pi((S+1)^k)!+1 > 1$, dan berakibat $(\pi((S+1)^k)!+1)^{1/(S+1)^k} > 1$ sehingga syarat 1 terpenuhi.

Untuk syarat 2:

$b_n = 0\left(a_n^{\beta}\right)$ artinya $\forall\varepsilon > 0 \exists N \ni |b_n| \leq \varepsilon \left|a_n^{\beta}\right|; \forall n \geq N,$ atau untuk $a_n \neq 0$ berlaku $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n^{\beta}} = 0$. Karena untuk $a_n = \pi((S+1)^n)!+1$ dan $b_n = 1$ berlaku $a_n^{\beta} > b_n$, maka :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\pi((S+1)^n)!+1)^{\beta}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n^{\beta}} = 0$$

maka syarat dua terpenuhi.

Oleh karena itu, maka contoh tersebut bersesuaian dengan S $> 2 \cong S > 2$

https://doi.org/10.22437/multiproximity.v1i01.18043

Sehingga sesuai dengan akibat $\mu\left(\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}\right) \geq S$, proposisi terbukti.

Proposisi 3

Diberikan K adalah suatu bilangan bulat positif dengan K$>$ 3. Juga diberikan $[x]$ adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x, maka barisan

$$\left\{\frac{2^{n+(K+1)^{2^{2[log_2 log_2 n]}}+n^2}}{2^{1+(K+1)^{2^{2\left[log_2 log_2 n\right]}}}+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

mempunyai ukuran keirasionalan lebih besar atau sama dengan $\frac{2k}{3}$.

Proposisi 4

Diberikan K adalah suatu bilangan positif dengan K $>$ 2 maka barisan

$$\left\{\frac{2^{n+(K+1)^{2^{2[log_2 log_2 n]}}+n!}}{2^{\pi+(K+1)^{2^{2\left[log_2 log_2 n\right]}}}+n^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

mempunyai ukuran keirasionalan lebih besar atau sama dengan K.

Contoh :
Diberikan masalah dengan syarat batas $\pi > 0$ untuk y'(x)+πy(x)=0 dengan nilai awal y'(1)=$-\pi$ dan y(1)=-1.

Solusi :
Pada suatu barisan bilangan real dengan $\pi > 0$, maka :

$$y(x) = R\ (\pi x)\ + S\ \ sin\ sin\ (\pi x)$$

Sehingga y'(x) = $-R\pi x\ +\ S\pi\ \ = S\ \pi - R\ \pi\ sin\ sin\ \pi x$

Substitusikan :

1. Untuk y(1) yang artinya ketika x=1 maka y(x)=-1
   $$y(1) = R\ cos\ cos\ 180 + S\ sin\ \ 180 = -R\ dalam\ radian$$
   Ini menunjukkan bahwa untuk nilai awal y(1)=-1 benar dengan R adalah suatu konstanta. Jika diambil $\pi = 3{,}141592\ \dots..$ maka akan menghasilkan suatu bilangan yang irasional.
2. Untuk y'(1) yang artinya ketika x=1 maka y'(x)=$-\pi$
   $$y'(1) = S\ \pi\ cos\ \ \pi - R\ \pi\ sin\ \ \pi\ \ \ = -\pi S\ dalam\ radian$$
   Ini menunjukkan bahwa nilai awal y'(1)= $-\pi$ benar dan S adalah suatu konstanta. Jika diambil untuk $\pi = 3{,}141592\ \dots..$ maka akan menghasilkan suatu bilangan irasional.

Kesimpulan

Dari definisi dan teorema serta lemma yang diambil dilakukan analisis pada setiap definisi dan teorema serta lemma yang diambil. Analisis dilakukan dengan berbagai langkah pembuktian dalam matematika. Langkah – langkah ini juga mengambil proposisi-proposisi untuk melakukan analisis lebih lanjut. Selain itu telah berhasil membuktikan tentang kajian ukuran keirasionalan pada barisan bilangan real. Hal ini telah dilakukan pembuktian-pembuktian yang dapat meyakinkan bahwa suatu bilangan irasional itu ada pada suatu bilangan real yang sulit untuk didefinisikan tetapi bilangan irasional itu ada.

Ucapan Terima Kasih

Puji dan syukur kami panjatkan kepada Tuhan yang Maha Esa atas rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan tugas mengenai praktek menulis karya ilmiah dengan judul *"Kajian Ukuran Keirasionalan Pada Barisan Bilangan Real",* yang diajukan untuk menyelesaikan tugas pada mata kuliah Penulisan Karya Ilmiah (PKI). Peneliti menyadari bahwa penulisan tugas ini tidak lepas dari bimbingan,bantuan,saran, dan kerjasama dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati dan rasa hormat, peneliti menyampaikan terima kasih atas segala bantuan yang telah diberikan oleh: Ibu Bunga Mardhotillah S.Si.,M.Stat.,selaku dosen pengampu III mata kuliah penulisan karya ilmiah. Teman-teman Prodi Matematika 2020 atas semangat dan solidaritasnya. Teman-teman satu team atas kerja samanya.

Daftar Pustaka

[1] Alfensi,.F.(2006)."Masalah Strurm-Liouville dan Aplikasinya".Yogyakarta :Jurusan Matematika Fakultas MIPA UNY
[2] Arikunto,.S.(2010)."Prosedur Penelitian". Jakarta : Asdi Mahatya.
[3] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R.(2000) " Introduction to Real Analysis". Third Edition. New York:John Wiley & Sons, Inc.
[4] Duverney, D. (2010)."Number Theory An Elementary Introduction Through Diophantine Problem". World Scientific.
[5] Erdos, P., Strauss, E.G, "On the Irrationality of Certain Series". Pacific Journal of Mathematics Vol. 55,(1974) Hal 85-92.
[6] Fathani, A.,H.,(2009)."Matematika Hakikat dan Logika".Yogyakarta : Ar-Ruzz Media.
[7] Hancl, J. "Louville Sequence". Nagoya Math. J. Vol.172, (2003) Hal. 173-187.
[8] Hancl, J., Filip, F."Irrationality Measure of Sequence". Hiroshima Math. J. Vol.35,(2005) Hal.183-195.
[9] Imayanti, T., K., & Sunarsini,."Kajian Ukuran Keirasionalan pada Barisan Bilangan

Real”. Jurnal Sains dan Ilmu POMITS.VOL.1,(2013)Hal.1-6.

[10] Mas’ud,.M(2011).”Dahsyatnya Misteri Bilangan-Bilangan dan Angka-Angka dalam Al-Qur’an”. Yogyakarta : Laksana.

[11] Nasution,. S.(2012)."Metode Research Penelitian Ilmiah”. Jakarta : PT. Bumi Aksara.

[12] Riduwan,.(2011).”Belajar Mudah Penelitian untuk Guru-Karyawan dan Peneliti Pemula”. Bandung : Alfabeta.

[13] Sondow,J.”Irrationality Measure, Irrationality Bases, and A Theorem of Jarnik”.Journal du Theorie des Nombres Bordeaux.(2003).

[14] Universitas Pendidikan Indonesia.(2009).”Pedoman Penulisan Karya Ilmiah”. Bandung : UPI Press.

[15] Whittaker,E.T.& Watson,.G.N.(1927).”A Course of Modern Analysis”. New York : Cambridge University Press.