KRITERIA MEMILIH PENDUGA TITIK TERBAIK

Oleh : Sufri

Abstrak

Misalkan X variabel random dengan fungsi padat peluang $f_X(x/\theta)$, θ parameter populasi yang tidak diketahui, dan $T_i = t_i(x_i)$ adalah penduga titik (statistik) bagi θ. Tulisan ini mencoba mengkaji secara teoritis bagaimana menemukan sifat-sifat baik dari suatu penduga titik, dengan kata lain kriteria apa saja yang harus dipenuhi oleh $T_i = t_i(x_i)$ agar $T_i = t_i(x_i)$ merupakan penduga titik terbaik.

Suatu penduga titik dikatakan penduga titik terbaik jika penduga titik tersebut memenuhi sifat-sifat berikut yaitu, tidak bias, efisien, dan konsisten. Suatu penduga titik dikatakan tidak bias, jika dan hanya jika nilai harapannya sama dengan nilai parameter yang diduga. Sedangkan suatu penduga titik dikatakan efisien, jika dan hanya jika penduga titik tersebut memiliki variansi terkecil diantara semua penduga titik tidak bias lain, dan suatu penduga titik tidak bias dikatakan konsisten bagi parameter populasi, jika dan hanya jika barisan penduga titik tidak bias tersebut konvergen secara stokastik (konvergen dalam probabilitas) ke parameter populasi.

Kata kunci : Penduga, Penduga Tidak Bias, Efisiensi, dan Konsistensi

Abstract

Let X be a random variable with probability density function $f_X(x/\theta)$, where θ unknown population parameter, and $T_i = t_i(x_i)$ is a point estimator for θ. Theoretically this paper try to study how to find some good properties of point estimator, on the other hand what is criteria must be hold in order to $T_i = t_i(x_i)$ is a the best point estimator.

A point estimator is called as the best point estimator if and only if the point estimator have some properties unbiased, eficiency, and consistency. A point estimator called unbiased if and only if it expected value equal with the value of the population parameter. A point estimator is called eficiency if and only if the point estimator have minimum variance among all point estimators on the class of point estimators, and a unbiased point estimator is called consisten for a population parameter if and only if the squence of unbiased point estimators stocastically convergen, or convergen in probability.

Key Words : Estimator, Unbiased Estimator, Eficiency, and Consistency

I. PENDAHULUAN

Salah satu fungsi statistika adalah melakukan estimasi dan inferensi. Estimasi yang dikaji dalam tulisan ini adalah estimasi titik. Estimasi adalah suatu prosedur dalam menentukan estimator (penduga) terbaik bagi parameter populasi. Parameter adalah semua kuantitas yang spesifik dalam populasi dan secara umum nilainya tidak diketahui, misalnya rataan populasi (μ), variansi populasi (σ^2), simpangan baku populasi (σ) dan lain-lain.

Populasi adalah suatu himpunan yang memuat semua objek yang diteliti dan dikenakan generalisasi kesimpulan. Dalam statistika berdasarkan jumlah anggota dikenal dua macam populai, pertama populasi berhingga dan kedua populasi tak behingga. Populasi berhingga adalah populasi yang jumlah anggotanya berhingga banyak, sedangkan populasi takberhingga adalah populasi yang jumlah anggotanya tak berhingga banyak. Populasi berhingga dapat dipandang sebagai populasi tak berhingga bila jumlah anggotanya relatif banyak, hal ini merupakan salah satu dasar timbulnya teori sampling (azas reduksi) (Hadi, 1979).

Bila suatu populasi berhingga, semua nilai parameternya dapat ditentukan dengan pasti, sehingga distribusi dari peubah random dalam populasi tersebut dapat ditentukan. Namun bila populasi tersebut tidak berhingga, nilai parameter populasi tersebut tidak dapat ditentukan dengan pasti, oleh karena itu untuk menentukan nilai parameter populasi harus dilakukan estimasi. Alat yang digunakan untuk menentukan atau menduga nilai parameter tersebut adalah kuantitas yang terdapat dalam sampel atau statistik

Statistik adalah kuantitas yang spesifik dalam sampel, dan nilai kuantitas ini diketahui secara pasti. Kuantitas inilah yang digunakan untuk mengestimasi parameter populasi. Karena dalam mengestimasi nilai parameter populasi digunakan nilai statistik, maka sangat wajar terjadi bias (penyimpangan) estimasi, yaitu selisih nilai mutlak antara nilai parameter dan nilai estimator. Suatu estimasi yang baik adalah apabila bias estimasi kecil atau selisih tesebut mendekati nol, sehingga presisi nilai dugaan menjadi lebih akurat.

Dari sudut pandang matematika persoalan ini dapat diformulasikan sebagai berikut, misalkan X_1, X_2, X_3, …, X_k sampel random berukuran k. Fungsi distribusi dari X_i ; i = 1, 2, … ,k sangat tergantung kepada nilai parameter yang tidak diketahui, katakan $\theta \in \Theta$, dengan Θ adalah ruang parameter (parameter space), menentukan nilai θ yang dipilih dari anggota Θ adalah suatu problem estimasi.

Sembarang fungsi peubah random terobservasi katakan $t_k(X_i)$; i = 1,2, … ,k disebut statistik sebagai penduga (estimator) dari parameter populasi (θ) dan nilai tertentu dari estimator, katakan $t_k(x_i)$; i = 1,2,… ,k disebut estimasi dari θ (Dudewicz dan Mishra, 1988). Secara praktis sembarang nilai peubah random terobservasi dapat dijadikan estimasi bagi parameter populasi, hal ini menunjukkan bahwa penduga (estimator) tidak tunggal, oleh karena itu untuk mendapatkan penduga terbaik dari sejumlah penduga, penduga tersebut harus memenuhi beberapa kriteria penduga yang baik.

Dalam statistika problem menentukan penduga terbaik dari sejumlah berhingga penduga yang terdapat dalam himpunan penduga merupakan suatu hal sangat penting, karena penduga atau nilai penduga (estimasi) adalah alat untuk memprediksi atau memprakirakan nilai parameter populasi yang akan diestimasi. Karena ketidak tunggalan penduga tersebut, diperlukan suatu metode bagaimana memilih penduga yang memiliki sebanyak mungkin kriteria estimator yang baik

II. PERUMUSAN MASALAH

Berdasarkan uraian yang telah dikemukakan di atas, maka permasalahan dalam tulisan ini dapat dirumuskan sebagai berikut, misalkan X_i ; i = 1,2, …, k sampel random berukuran k, dengan fungsi padat peluang $f(X_i | \theta)$ diketahui dan parameter populasi (θ) tidak diketahui. Bila fungsi dari peubah random X_i yaitu $T_i = t_i(x_i)$ adalah penduga bagi parameter populasi (θ), kriteria apa saja yang harus dipenuhi oleh T_i sehingga penduga tersebut merupakan penduga terbaik bagi θ.

III. PEMBAHASAN

Misalkan X_i i = 1,2, …, k sampel random berukuran k, dengan fungsi padat peluang $f(X_i | \theta)$ diketahui dan parameter (θ) tidak diketahui. Apabila nilai parameter (θ) diketahui maka secara praktis prilaku (distribusi) dari populasi akan diketahui pula.

Dalam statistika alat yang digunakan untuk menduga parameter populasi disebut statistik, yaitu kuantitas yang terdapat dalam data sampel, karena kuantitas ini terdapat dalam sampel maka nilai statistik ini diketahui dengan pasti. Misalnya bila Y_i ; i = 1,2, … ,k sampel random berukuran k dan berdistribusi normal dengan rataan populasi (μ) dan variansi populasi (σ^2), ditulis $Y_i \sim N(\mu , \sigma^2)$, maka statistik rataan sampel $\hat{\mathbf{y}} = 1/k\sum y_i$ dan variansi sampel $\mathbf{s}^2 = 1/k \sum (y_i - \hat{\mathbf{y}})^2$, atau $\mathbf{s}^2 = \sum (y_i - \hat{\mathbf{y}})^2/(k\text{-}1)$ berturut-turut sering digunakan masing-masing sebagai estimator bagi μ dan σ^2. Dalam hal ini mungkin dapat timbul pertanyaan, mengapa diyakini statistik sampel $\hat{\mathbf{y}}$ dan $\mathbf{s}^2$ berturut-turut digunakan sebagai estimator bagi rataan (μ) , dan variansi populasi (σ^2) dalam distribusi normal, mengapa tidak nilai-nilai statistik lain yang dapat diambil dari sembarang sampel terobservasi sepanjang kuantitas tersebut merupakan fungsi dari peubah random terobservasi itu. Untuk menjawab pertanyaan ini diperlukan suatu argumentasi tentang sifat-sifat baik minimal yang harus dimiliki oleh suatu penduga (estimator). Paling tidak terdapat tiga sifat baik yang harus dimiliki oleh suatu penduga (estimator), yaitu

tidak bias, **efisien (memiliki variansi minimum)** dan **konsisten** (Bain dan Engelhard, 1992).

Untuk mengetahui apakah suatu estimator memiliki ketiga sifat baik tersebut harus dilakukan pemeriksaan secara matematis, pertama ketidak biasan estimator dapat ditelusuri melalui nilai harapan (mathematical expected value) dari penduga itu, apabila nilai harapan suatu penduga sama dengan parameter yang diduga, maka dikatakan penduga tersebut tidak bias, namun estimator yang memiliki sifat ini tidak tunggal (unik), sehingga ketidak tunggalan estimator yang bersifat tidak bias ini menciptakan adanya himpunan estimator tak bias. Nilai harapan suatu penduga dan beberapa sifatnya didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1
Misalkan t_k (X_i) ; i = 1,2, … ,k penduga bagi parameter populasi θ. Penduga t_k (X_i) ; i = 1,2, … ,k dikatakan tidak bias jika dan hanya jika nilai harapan (expected value) dari t_k (X_i) sama dengan parameter populasi θ, ditulis : $E\{t_k (X_i)\} = \theta$.

Definisi 3.2
Bias dari $t_k (X_i) = E\{t_k (X_i)\} - \theta = b_k(\theta)$.

Definisi 3.3
Penduga t_k (X_i) disebut tidak bias secara asimtotis terhadap parameter populasi (θ) jika dan hanya jika lim $b_k(\theta) = 0$, untuk k mendekati tak hingga ($k \rightarrow \infty$)

Sebagai contoh perhatikan sampel random Y_i ; i = 1, 2, … ,k berukuran k yang terdistribusi secara identik dan bebas (independent), berdistribusi seragam dengan fungsi padat peluang didefinisikan sebagai $f_Y(\theta) = 1/\theta$; $0 < Y_i < \theta$. Sekarang ingin diduga parameter θ dengan suatu statistik Y_{max}, atau Y_{min} yaitu nilai terbesar (terkecil) dari data amatan sampel random. Pertanyaannya adalah apakah Y_{max} dan Y_{min} bias atau tidak bias bagi parameter θ, bila bias dapatkah ditemukan penduga tak bias yang diturunkan dari penduga bias tersebut, serta bagaimanakah bentuk fungsi distribusi dari penduga bias itu.

Untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan tersebut, pertama sekali ditentukan fungsi probabilitas dari Y_{max} yaitu : misalkan $W = Y_{max}$ dengan nilai adalah u, sehingga fungsi distribusi kumulatif dari W adalah

$$P(W \le u) = P(Y_{max} \le u) = P(y_1 \le u , y_2 \le u , \dots , y_k \le u). \quad \dots\dots\dots(1)$$

Karena sampel random bersifat bebas (independent), maka pada (1) berlaku kaidah perkalian (Dudewicz dan Mishra, 1988), sehingga (1) dapat ditulis menjadi :

$$P(W \le u) = P(Y_{max} \le u) = P(y_1 \le u) \,.\, P(y_2 \le u) \dots P(y_k \le u) \quad \dots\dots\dots(2)$$

Perhatikan bahwa setiap suku pada ruas kanan (2) merupakan fungsi distribusi kumulatif dari Y, dengan demikin (2) dapat ditulis menjadi :

$$M(u) = F(u) \,.\, F(u) \,.\, \dots \,.\, F(u) = \{F(u)\}^k \quad \dots\dots\dots(3)$$

dengan M(.) dan F(.) berturut-turut merupakan fungsi distribusi dari W dan Y. Berdasarkan (3) dapat ditentukan fungsi densitas dari u yaitu :

$$m(u) = d/du\,\{M(u)\} = d/du\,\{F(u)\}^k = k\,\{F(u)\}^{k-1}\, d/du\{F(u)\} = k\,\{F(u)\}^{k-1} f(u) \quad \dots\dots(4)$$

Dari $f_Y(\theta) = 1/\theta$; $0 < y_k < \theta$, diperoleh fungsi distribusi dari Y, yaitu :

$$F(y_k) = \int_0^{y_k} f(u)\, du = y_k/\theta \; ; \; 0 < y_k < \theta \quad \dots\dots\dots(5)$$

Sehingga bila (5) disubstitusikan ke (4) diperoleh **fungsi densitas dari u** yaitu,

$$m(u) = k\,(u/\theta)^{k-1} \,.\, 1/\theta = (k\,u^{k-1}) / \theta^k \; ; \; 0 < u < \theta. \quad \dots\dots\dots(6)$$

Untuk melihat apakah statistik Y_{max} bias bagi parameter populasi (θ), harus ditunjukkan nilai

$$E(W) = E(Y_{max}) = \int_0^\theta u\, m(u)\, du = \int_0^\theta u\, (k\, u^{k-1}) / \theta^k\, du = (k\, \theta / k+1) \text{ ……… ….(7)}$$

ternyata nilai $E(Y_{max}) \neq \theta$, artinya Y_{max} adalah estimator bias bagi θ. Namun bersarkan kepada penduga yang bias ini, dapat dimanipulasi sehingga diperoleh penduga yang tidak bias bagi θ, yaitu dengan cara memikirkan suatu kuantitas satistik (T_1), sedemikian hingga $E(T_1) = \theta$. Jadi dengan mengambil $\mathbf{T_1 = (k+1)Y_{max} / k}$, maka T_1 ekspektasi dari Y_{max} sama dengan θ, atau $E(Y_{max}) = \theta$ yaitu :

adalah penduga tak bias bagi θ, karena $E(T_1) = E\{(k+1)Y_{max} / k\} = \theta$.

Dengan cara yang sama akan ditunjukkan $Z = Y_{min}$ adalah penduga bias bagi θ, yaitu dengan memperlihatkan $E(Z) \neq \theta$. Fungsi distribusi dari Z adalah,

$$P(Z \geq z) = P(Y_1 > z, Y_2 > z, \ldots, Y_k > z) = P(Y_1 > z) \,.\, P(Y_2 > z) \,.\, \ldots \,.\, P(Y_k > z)$$

$$\leftrightarrow \quad 1 - P(Z < z) = \{1 - P(Y_1 \leq z)\}.\{1 - P(Y_2 \leq z)\} \ldots \{1 - P(Y_k \leq z)\} \text{ …………………………………….(8)}$$

Sebut fungsi distribusi dari Z dan Y beturut-turut H(.) dan F(.), dengan demikian persamaan (8) dapat ditulis dalam bentuk,

$$1 - H(z) = \{1 - F(z)\}^k \text{ ……………………………………………..………………(9)}$$

karena $F(z) = z/\theta$; $0 < z < \theta$, maka persamaan (9) dapat ditulis menjadi,

$$1 - H(z) = \{1 - (z/\theta)\}^k \text{ ……………………………………………………………………….(10)}$$

dari pesamaan (10), diperoleh **fungsi densitas dari Z** yaitu,

$$\frac{d}{dz}\{1 - H(z)\} = \frac{d}{dz}\{1 - (z/\theta)\}^k$$
$$\leftrightarrow \quad -h(z) = k\{1 - z/\theta\}^{k-1}(-1/\theta)$$
$$\leftrightarrow \quad h(z) = k/\theta\, \{1 - z/\theta\}^{k-1} ;\ 0 < z < \theta. \text{ ……………………………………………….…………...(11)}$$

dengan menggunakan pesamaan (11) diperoleh nilai harapan dari Z yaitu,

$$E(Z) = \int_0^\theta z\, k/\theta\, \{1 - z/\theta\}^{k-1}\, dz \text{ ……………………………………………………….…………….(12)}$$

dengan teknik substitusi dan menerapkan fungsi beta terhadap persamaan (12), diperoleh nilai harapan Z yaitu, $E(Z) = \theta/(k + 1) \neq \theta$. Dari nilai harapan Z ini jelas $Z = Y_{min}$ adalah penduga bias bagi parameter populasi (θ). Namun bila diambil $\mathbf{T_2 = (k + 1)\, Z = (k + 1)\, Y_{min}}$, maka T_2 adalah penduga tak bias bagi parameter populasi (θ), karena $E(T_2) = E\{(k + 1)\, Z\} = \theta$.

Dari kasus di atas dapat dilihat bahwa dari setiap penduga yang bias dapat diciptakan penduga takbias, hal ini mengindikasikan penduga tak bias tersebut tidak tunggal. Karena ketidak tunggalan penduga tak bias tersebut diperlukan kriteria baik yang lain untuk memilih penduga terbaik.

Kriteria kedua dalam menentukan penduga yang baik adalah **efisien.** Efisiensi dua atau lebih penduga tak bias didefinisikan sebagai perbandingan relatif variansi antara penduga-penduga tak bias tersebut Secara matematis definisi ini dapat dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 3.4
Misalkan X_i ; i = 1,2, …, k sampel random berukuran k, dengan fungsi padat peluang $f(X_i \mid \theta)$ diketahui dan parameter populasi (θ) tidak diketahui. Bila M_1 dan M_2 penduga tak

bias bagi parameter populasi (θ), dengan variansi berturut-turut σ_1^2 dan σ_2^2, maka M_1 dikatakan lebih efisien dari M_2 jika dan hanya jika $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$. Efisiensi relatif (E_r) M1 terhadap M_2 didefinisikan sebagai perbandingan antara σ_2^2 dan σ_1^2 atau ditulis sebagai $E_r = \sigma_2^2 / \sigma_1^2$ dengan kriteria sebagai berikut :

(a). $E_r = \sigma_2^2 / \sigma_1^2 > 1 \rightarrow M_1$ lebih efisien dari M_2
(b). $E_r = \sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 1 \rightarrow M_1$ dan M_2 memiliki efisiensi yang sama
(c). $E_r = \sigma_2^2 / \sigma_1^2 < 1 \rightarrow M_2$ lebih efisien dari M_1

Sebagai ilustrasi tentang efisiensi penduga tak bias ini, di atas telah diperoleh dua penduga tak bias yaitu, $\mathbf{T_1 = (k+1)Y_{max} / k}$ dan $\mathbf{T_2 = (k + 1) Z = (k + 1) Y_{min}}$, untuk mengetahui efisiensi kedua penduga tak bias T_1 dan T_2, maka harus dicari perbandingan kedua variansi T_2 dan T_1.

Telah diketahui fungsi densitas dari u dan z berturut-turut adalah, $m(u) = (k\, u^{k-1}) / \theta^k$; $0 < u < \theta$ dan $h(z) = k/\theta \{1 - (z/\theta)\}^{k-1}$; $0 < z < \theta$. Pertama sekali dihitung variansi dari W atau Var (W) yaitu,

$$\text{Var}(W) = E(W^2) - \{E(W)\}^2 \quad \ldots\ldots(13)$$

$$E(W^2) = k / \theta^k \int_0^\theta u^2\, u^{k-1}\, du = k\,\theta^2 / (k + 2) \quad \ldots\ldots(14)$$

Bila persamaan (14) dan (7) disubstitusikan ke persamaan (13) diperoleh,

$$\text{Var}(W) = k\theta^2 / (k + 2)(k + 1)^2. \quad \ldots\ldots(15)$$

sehingga dengan menggunakan persamaan (15) diperoleh variansi T_1 yaitu,

$$\text{Var}(T_1) = \{(k + 1)/k\}^2\, \text{Var}(W) = \theta^2 / k\,(k + 2). \quad \ldots\ldots(16)$$

Dengan cara yang sama dapat ditentukan variansi dari T_2 yaitu,

$$\text{Var}(T_2) = k\,\theta^2 / (k + 1)(k + 2). \quad \ldots\ldots(17)$$

Berdasarkan persamaan (16) dan (17) diperoleh efisiensi relatif penduga takbias T_1 dan T_2 yaitu,

$$\text{Var}(T_2) / \text{Var}(T_1) = \{k\,\theta^2 / (k + 1)(k + 2)\}\{k(k + 2)/\theta^2\} = k^2 / (k + 1). \quad \ldots\ldots(18)$$

Berdasarkan definisi 3.1dan persamaan (18) diperoleh kesimpulan berikut,
(i). T_2 lebih efisien dari T_1 bila k = 1 atau k < 1
(ii). T_1 lebih efisien dari T_2 bila k > 1.

Dari ilustrasi ini terlihat bahwa efisiensi relatif dari penduga takbias tergantung kepada ukuran sampel (k). Bila terdapat dua atau lebih penduga takbias, penggunaan teknik efisiensi relatif ini mungkin membosankan, karena variansi semua penduga takbias harus ditentukan lalu membandingkannya satu persatu, pekerjaan ini membutuhkan banyak waktu. Untuk mengatasi persoalan ini, Roussas (1976) mengusulkan suatu teknik dan prosedur menentukan efisiensi penduka takbias, yaitu dengan mencari batas bawah variansi penduga takbias tersebut, yang dikenal dengan batas bawah Cramer–Rao (BBCR). Artinya apabila variansi suatu penduga takbias mencapai BBCR suatu distribusi, maka dijamin penduga takbias tersebut memiliki variansi terkecil (minimum) bila dibandingkan dengan semua penduga takbias dalam himpunan yang memuat semua penduga takbias.

Syarat perlu dan cukup untuk memperoleh BBCR suatu distribusi adalah dipenuhinya syarat-syarat regularitas bagi suatu distribusi peubah random. Menurut Mood, dkk (1974), syarat-syarat regularitas bagi suatu fungsi densitas $f(X \mid \underline{\theta})$ adalah,

(i). $\partial/\partial\theta \log f(x_i \mid \theta)$ ada untuk setiap x_i dan $\theta \in \Theta$ ruang parameter) ; i = 1, 2, 3, … ,k

k k

(ii). $\partial/\partial\theta \int \ldots \int \prod_{i=1} f(x_i | \theta)\, dx_i = \int \ldots \int \partial/\partial\theta \prod_{i=1} f(x_i | \theta)\, dx_i$

(iii). $\partial/\partial\theta \int \ldots \int t(x_i) \prod_{i=1}^{k} f(x_i | \theta)\, dx_i = \int \ldots \int \partial/\partial\theta\, t(x_i) \prod_{i=1}^{k} f(x_i | \theta)\, dx_i$

(iv). $0 < E\, \{[\partial/\partial\theta \log f(x_i | \theta)\ ]^2\} < \infty$, untuk setiap $\theta \in \Theta$.

Berdasarkan syarat-syarat regularitas di atas dapat diturunkan teorema tentang BBCR suatu distribusi peubah random seperti yang diungkapkan dalam teorema 3.5 berikut.

Teorema 3.5

Misalkan X_i ; i = 1, 2, 3, … , k sampel random berukuran k dengan fungsi densitas $f_X(x_i | \theta)$, dan sebut $T = t(x_i)$ penduga takbias bagi parameter populasi (θ). Bila $f_X(x_i | \theta)$ memenuhi syarat regularitas, khususnya, $\partial^2/\partial\theta^2 \int f(x_i | \theta)\, dx_i = \int \partial^2/\partial\theta^2\, f(x_i | \theta)\, dx_i$, maka variansi dari T akan memenuhi ,

$$Var(T) \geq 1 / \ k\, E\, [\ \partial/\partial\theta \log f(x_i | \theta)]^2 = 1 / -k\, E\, [\ \partial^2 / \partial\theta^2 \log f(x_i | \theta)\ ] \quad \ldots\ldots(19)$$

Bilangan $kE[\ \partial/\partial\theta\ \log\ f(x_i | \theta)]^2 = kI(\theta)$ dalam (19) disebut bilangan informasi Fisher tentang parameter populasi (θ) yang termuat dalam sampel random berukuran k. Selanjutnya akan diperlihatkan $E\ [\ \partial/\partial\theta\ \log\ f(x_i | \theta)]^2 = -E\ [\ \partial^2/\partial\theta^2\ \log\ f(x_i | \theta)$, artinya dalam menentukan BBCR suatu distribusi salah satu kuantitias tersebut dapat digunakan.

Misalkan $Z = \partial/\partial\theta \log f(x_i | \theta) = 1/f(x_i | \theta)\ \ \partial/\partial\theta\, f(x_i | \theta) = \partial/\partial\theta\, f(x_i | \theta) / f(x_i | \theta)$ ……………...(20)
Bila dalam (20) turunan parsial pertama dari Z diambil terhadap θ maka diperoleh,

$$\partial Z/\partial\theta = \partial^2/\partial\theta^2\, f(x_i | \theta) / f(x_i | \theta) - Z^2 \text{ atau } \partial^2/\partial\theta^2\, f(x_i | \theta) / f(x_i | \theta) = \partial Z/\partial\theta + Z^2 \quad \ldots\ldots(21)$$

Karena $\int [\partial^2/\partial\theta^2\, f(x_i | \theta) / f(x_i | \theta)]\, .\, f(x_i | \theta)\, dx_i = E\, \{\partial^2/\partial\theta^2\, f(x_i | \theta) / f(x_i | \theta)\} = 0$, maka persamaan (21) dapat ditulis menjadi

$$E\, \{\partial^2/\partial\theta^2\, f(x_i | \theta) / f(x_i | \theta)\} = E\, \{\ \partial Z/\partial\theta + Z^2\ \} \text{ atau } E\{Z^2\ \} = -E\{\ \partial Z/\partial\theta\} \quad \ldots\ldots(22)$$

Berdasarkan persamaan (22) dapat disimpulkan $E\ [\ \partial/\partial\theta \log f(x_i | \theta)]^2 = -\ E\ [\ \partial^2 / \partial\theta^2 \log f(x_i | \theta)\ ]$.

Untuk memahami uraian di atas perhatikan kasus berikut, misalkan peubah random Y_i ; i = 1, 2, 3, …, k berdistribusi seragam, bersifat independent dan identik dengan fungsi densitas

$$f_Y(\theta) = 1/\ \theta\ ;\ 0 < Y_i < \theta$$

BBCR bagi $Y_i \sim U(\theta)$ dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut :

$\log\ f_Y(\theta) = \log 1/\ \theta = \log 1 - \log \theta = -\log \theta$
$\partial/\partial\theta \log f_Y(\theta) = -1/\ (\theta)$ dan $\partial^2/\partial\theta^2 \log f_Y(\theta) = 1/\theta^2$
$E\ \{\partial^2/\partial\theta^2 \log f_Y(\theta)\} = E(1/\theta^2) = 1/\theta^2$

Sehingga BBCR bagi Y_i adalah $1/\ (-k/\theta^2) = -\ \theta^2/k$

Dari persamaan (16) dan (17) telah diketahui bahwa T_1 dan T_2 adalah penduga takbias bagi parameter θ dengan variansi berturut-turut adalah, $Var\ (T_1) = \theta^2 / k\ (k + 2)$ dan $Var\ (T_2) = k\ \theta^2 / (k + 1)(k + 2)$, ternyata baik nilai variansi T_1 dan T_2 tidak mencapai nilai minimum BBCR dari $Y_i \sim U(\theta)$. Hal ini menunjukkan efisiensi relatif kedua penduga takbias T_1 dan T_2 hanya dapat ditentukan berdasarkan rasio kedua variansinya seperti yang ditunjukkan pada persamaan (18).

Kriteria ketiga bagi suatu penduga adalah **konsistensi.** Konsistensi merupakan sifat asimtotis suatu penduga (Rao, 1976), artinya penduga takbias dalam himpunan penduga takbias dipandang sebagai suatu barisan yang dinotasikan sebagai $\langle\ T_k\ \rangle$.

Definisi 3.6

Penduga takbias $T_k = h(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_k)$ disebut konsisten bagi parameter populasi (θ) bila $\langle\ T_k\ \rangle$ konvergen secara stokastik (konvergen dalam probabilitas) ke θ, yaitu bila untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$ terdapat k_0, yang tergantung kepada ε dan δ, sehingga untuk semua $k > k_0$ berakibat, $P[\ |T_k - \theta| < \varepsilon\ ] > 1 - \delta$.

Definisi 3.6 ini tidak dapat langsung digunakan untuk memperlihatkan apakah suatu penduga takbias bersifat konsisten atau tidak. Oleh karena itu terlebih dahulu harus dipahami batas-batas probabilitas dan ketidaksamaan Chebyshev (Bain dan Engelhardt1992).

Teorema 3.7

Jika X peubah random dengan fungsi densitas f(x) dan u(x) fungsi bernilai real non negatif, maka untuk setiap bilangan positif c > 0, berlaku $P[u(X) \geq c] \leq E[u(X)] / c$

Bukti

Misalkan $A = \{x \mid u(x) \geq c\}$, maka dapat ditulis (dalam kasus X peubah random kontinu)

$$E[u(X)] = \int_{\infty}^{\infty} u(x) f(x)\,dx = \int_{A} u(x) f(x)\,dx + \int_{A^c} u(x) f(x)\,dx$$

$$\geq \int_{A} u(x) f(x)\,dx \geq \int c\, f(x)\,dx = c\, P[X \epsilon A] = c\, P[u(X) \geq c]. \bullet$$

atau dapat ditulis menjadi : $P[u(X) \geq c] \leq E[u(X)] / c$ …………………………………… …………(23)

Teorema 3.8

Jika X peubah random dengan rataan μ dan variansi σ^2, maka untuk sembarang k > 0 berlaku,

$$P[\,|X - \mu| \geq k\sigma\,] \leq 1/w^2 \quad \text{………………………………………………..(24)}$$

Bukti :

Jika $u(X) = (X - \mu)^2$, dan $c = w^2\sigma^2$, maka dengan menggunakan (23) diperoleh,

$$P[\,(X - \mu)^2 \geq w^2\sigma^2\,] \leq E(X - \mu)^2 / w^2\sigma^2 = \sigma^2 / w^2\sigma^2 = 1 / w^2. \bullet$$

Karena $|X - \mu| \geq w\sigma$ ekivalen dengan $X \geq \mu + w\sigma$ dan $X \leq \mu - w\sigma$, maka bentuk (24) dapat ditulis dalam bentuk

$$P[\,|X - \mu| < w\sigma\,] > 1 - 1/w^2. \quad \text{……………………………………………..(25)}$$

Bila dalam (25) diambil $\varepsilon = w\sigma$, maka (25) dapat ditulis dalam bentuk ,

$$P[\,|X - \mu| < \varepsilon\,] > 1 - \sigma^2 / \varepsilon^2 \text{ atau } P[\,|X - \mu| \geq \varepsilon\,] \leq \sigma^2 / \varepsilon^2. \quad \text{………………...(26)}$$

Berdasakan teorema 3.8, agar suatu penduga takbias memenuhi sifat konsistensi yang didasarkan kepada definisi 3.6, harus ditunjukkan untuk k mendekati ∞ ($k \to \infty$) maka lim $P[\,|T_k - \theta| < \varepsilon\,] \to 1$. Penduga yang memiliki ketiga kriteria baik yaitu takbias, efisien (variansi minimum), dan konsisten disebut penduga takbias seragam dengan variansi minimum.

Berikut ini dikemukakan suatu kasus untuk memahami pemakaian teorema 3.8.Telah diketahui $\mathbf{T_1 = (k+1)Y_{max} / k}$ dan $\mathbf{T_2 = (k + 1) Z = (k + 1) Y_{min}}$ adalah dua penduga tak bias bagi parameter populasi (θ), bila Y_i berdistribusi seragam identik dan bebas dengan parameter populasi (θ). Sekarang akan ditunjukkan bahwa T_1 dan T_2 adalah penduga tak bias yang konsisten bagi parameter populasi (θ).

Pertama akan ditunjukkan T_1 adalah penduga takbias yang konsisten bagi θ. Berdasarkan pertidaksamaan (25) diperoleh,

$$P[\,|T_1 - \theta| < w \sqrt{\{\theta^2/k(k+2)\}}\,] > 1 - 1/w^2 \quad \text{………………………..………..(i).}$$

Menurut definisi 3.6, dapat dipilih $\varepsilon = w\sqrt{\{\theta^2/k(k+2)\}}$ atau $1/w^2 = \theta^2/(\varepsilon^2 k(k+2))$ ………………..……..(ii).

Substitusikan persamaan (ii) ke dalam pertidaksamaan (i) diperoleh,

$$P[\,|T_1 - \theta| < \varepsilon\,] > 1 - \theta^2/\{\varepsilon^2 k(k+2)\} \quad \text{…………………………………………………………(iii).}$$

Bila kedua ruas petidaksamaan (iii) diambil limitnya masing-masing untuk $k \to \infty$, maka akan diperoleh,

$$\lim P[\,|T_1 - \theta| < \varepsilon\,] \to 1 \text{………………………………………………………………….……(iv).}$$

Pertidaksamaan (iv) mengindikasikan bahwa penduga tak bias T_1 konsisten bagi parameter populasi (θ).

IV. KESIMPULAN

Misalkan (i). X_i ; i = 1,2,3, … k sampel random berukuran k dengan fungsi padat peluang $f(X_i|\theta)$ dan θ adalah parameter populasi yang nilainya tidak diketahui. (ii). $T = t_i(x_i)$ statistik sebagai estimator (penduga) bagi θ. Bila T adalah penduga terbaik bagi θ, maka T harus memenuhi kriteria berikut,

1. Tidak bias bagi θ, yaitu nilai harapan dari T = θ atau $E(T) = \theta$.
2. Efisien, artinya apabila T_1 dan T_2 adalah dua penduga tidakbias bagi θ, dan bila $Var(T_1) < Var(T_2)$, maka T_1 lebih efisien dari T_2.
3. Bila fungsi padat peluang dari X_i memenuhi syarat-syarat regularitas, maka batas bawah Cramer-Rao dapat digunakan sebagai indikator untuk menentukan penduga yang paling efisien.
4. Karena penduga takbias bersifat tidak tunggal, maka penduga takbias tersebut dapat dipandang sebagai suatu barisan. Penduga yang baik adalah apabila barisan penduga ($\langle T_k \rangle$) bersifat konsisten, yaitu apabila barisan penduga ($\langle T_k \rangle$) memenuhi lim $P[\,|T_k - \theta| < \varepsilon\,] \rightarrow 1$, untuk $k \rightarrow \infty$ dan setiap $\varepsilon > 0$.
5. Bila suatu penduga memiliki ketiga kriteria tersebut, maka penduga itu disebut penduga takbias seragam dengan variansi minimu

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa T_2 juga merupakan penduga takbias yang konsiten bagi parameter populasi (θ).

DAFTAR PUSTAKA

Bain L.J. dan Engelhardt, M.,1992, Introduction to Probability and Mathematical Statistics, Duxbury Press, Belmont California.

Dudewicz E.J. dan Mishra S.N., 1988, Modern Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, New York.

Hadi S., 1981, Metodologi Research, Universitas Gajahmada, Yogyakarta.

Mood A.M., Graybill F.A.,dan Boes D.C., 1984, Introduction To The Theory Of Statistics, Edisi ke tiga, Kwan Yee Bindery Co., Singapore.

Rao C.R., 1973, Linear Statistical Inference and Its Applications, John Wiley & Sons, Taipe, Taiwan.

Roussas G.G., 1973. A First Course In Mathematical Statistics, Mei Ya Publications, Inc., Taipe, Taiwan